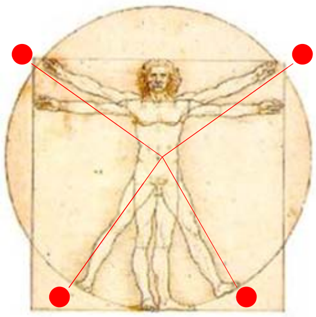
TECNOLOGÍ@ y *DESARROLLO*

Revista de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente

VOLUMEN XV. AÑO 2017

SEPARATA



APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE CALENDARIOS DE EXÁMENES MEDIANTE COLOREADO DE GRAFOS

Pilar Moreno Díaz, Jesús Sánchez Allende

UNIVERSIDAD ALFONSO X EL SABIO
Escuela Politécnica Superior
Villanueva de la Cañada (Madrid)

Mayo, 2017.
http://www.uax.es/publicacion/aproximacion-al-problema-de-calendarios-de-examenes-mediante-coloreado.pdf

Escuela Politécnica Superior.
Universidad Alfonso X el Sabio.
28691, Villanueva de la Cañada (Madrid).
ISSN: 1696-8085
Editor: Javier Morales Pérez – tecnologia@uax.es

APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE CALENDARIOS DE EXÁMENES MEDIANTE COLOREADO DE GRAFOS

Pilar Moreno Díaz[1], Jesús Sánchez Allende[2]

(1) Licenciada en Ciencias (Matemáticas)
Área de tecnologías de información y comunicaciones, Escuela Politécnica Superior, Universidad Alfonso X el Sabio. Avda. de la Universidad nº1, Villanueva de la Cañada, 28691 Madrid. España.
Tlf.:918109237, email: pilar@myuax.com

(2) Dr. Ing. de Telecomunicación
Área de tecnologías de información y comunicaciones, Escuela Politécnica Superior, Universidad Alfonso X el Sabio. Avda. de la Universidad nº1, Villanueva de la Cañada, 28691 Madrid. España.
Tlf.:918109135, email: jallende@myuax.com

RESUMEN: La creación de calendarios de exámenes es una de las actividades que tienen que realizar todas las Universidades e Instituciones educativas, una o varias veces al año. En este artículo se plantea una variación de este problema a consecuencia de la implantación de formación semipresencial y los nuevos requisitos que surgen para la elaboración del calendario de exámenes. En este artículo se presenta una solución que utiliza la Teoría de grafos; en concreto, el problema de coloreado de grafos. Se utilizan varias estrategias de implementación del algoritmo y se analiza su comportamiento para valorar cuál de ellas proporciona mejores resultados. Del análisis realizado se ha podido comprobar que todas proporcionan resultados similares. Para valorar mejor las distintas estrategias, se ha realizado una comparativa con problemas de mayor grado de dificultad, resultando que una de las estrategias proporciona resultados mejores en la mayoría de los casos, pero no en todas las situaciones, por lo que la solución propuesta consiste en ejecutar todas las implementaciones y realizar posteriormente una selección entre las soluciones obtenidas.

PALABRAS CLAVE: Calendario de exámenes, teoría de grafos, coloreado de grafos, número cromático, estrategias de ordenación.

ABSTRACT: The creation of test calendars is one of the activities that have to be carried out by all universities and educational institutions once or several times a year. This article presents a new problem resulting from the implementation of blended training and the new requirements for the development of its exam timetable. The solution adopted is based on the theory of graphs, in particular the problem of coloring graphs. Using several strategies of implementation of the algorithm and analyzing which of them provides better results. From the analysis performed it has been verified that all provide similar results for the problem raised. Therefore a comparison was made for problems with greater degree of difficulty shown that one of the strategies provides slightly better results in most cases, but not in all situations, so the proposed solution consists of executing all the implementations and performing a selection among the solutions obtained.

KEY-WORDS: Timetabling problem, graph theory, graph coloring, chromatic number, sorting algorithms.

1. Introducción

La implantación de la formación semipresencial en las universidades abre las puertas de la formación reglada universitaria a grupos de estudiantes de características especiales, aquellos a los que no les es posible la asistencia regular a las clases para conseguir una formación acorde a las necesidades laborales actuales. La tecnología actual permite una formación de calidad para estos estudiantes mediante el uso de un LMS (*Learning Management System*) y la adaptación del modelo educativo de forma acorde. Pero en la actualidad una parte de la evaluación se continúa realizando de forma presencial. Para minimizar el tiempo que estos estudiantes tienen que dedicar a la evaluación presencial en la Universidad se pretende concentrar los exámenes presenciales de estos estudiantes minimizando su presencia, si es posible, a un fin de semana. Esta situación plantea el interesante problema de lograr que todos los estudiantes puedan presentarse a todos los exámenes y se minimice el tiempo requerido sin que se le solapen exámenes a ningún estudiante.

Una de las características de los estudiantes que se matriculan en la modalidad semipresenciales, o en la modalidad no presencial, es que intentan compatibilizar sus estudios con otras actividades, habitualmente su trabajo, y por tanto no necesariamente se matriculan por cursos completos. Así mismo, tampoco se matriculan en asignaturas de un único curso ya que suelen provenir de estudios previos siendo su matrícula de una diversidad de asignaturas de cursos diferentes.

Estas situaciones marcan una clara diferencia con las matrículas de estudiantes presenciales en los que la impartición síncrona de la docencia debería crear restricciones sobre el conjunto de asignaturas matriculadas, teniendo como modelo típico de una matrícula el de un curso y las asignaturas no superadas anteriormente. Se puede utilizar esta estructura para elaborar los calendarios de exámenes, con el objetivo principal de que no existan solapamientos para los estudiantes y estos puedan asistir a todos los exámenes del conjunto de asignaturas que constituyen su matrícula. Ante situaciones de estudiantes con una matrícula muy dispersa entre varios cursos puede que no siempre se consiga, generándose solapes en el calendario de exámenes.

En el caso de la docencia semipresencial, o en la no presencial, se plantea un problema diferente, ya que independientemente de las asignaturas en que se hayan matriculado, se debe conseguir un calendario de exámenes en que no se solapen asignaturas para ninguno de los estudiantes matriculados en un intervalo de tiempo lo menor posible. Esto genera una situación con un problema que resulta difícil de resolver y difícil de valorar si la solución obtenida es la mejor posible.

2. Planteamiento del problema

Con el tipo de estudiantes descritos anteriormente, en la Universidad Alfonso X El Sabio se ha observado que los estudiantes se encuentran con una combinación de asignaturas realmente heterogénea. A modo de ejemplo se va a utilizar para analizar el problema la matriculación, es decir el conjunto de estudiantes y el conjunto de asignaturas en las que se encuentran matriculados, del Grado en Ingeniería Informática en modalidad semipresencial. Se van a utilizar datos reales anónimos de un conjunto reducido de estudiantes que muestre claramente la complejidad del problema a resolver, de forma que permita valorar los algoritmos de resolución aplicados y los resultados obtenidos.

En el problema que se va a mostrar se dispone de un reducido número de estudiantes, 15 estudiantes, matriculados en 32 asignaturas distintas. Sus matrículas presentan mucha dispersión con respecto a cursos a los que pertenecen. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestra la información del problema que se va a mostrar: en la primera columna aparecen los distintos estudiantes numerados del 1 al 15, en la segunda columna aparece el número de asignaturas totales en que se encuentra matriculado cada uno de los estudiantes y en las siguientes columnas la distribución de sus asignaturas en los diferentes cuatro cursos del grado. En la **Figura 1** se puede observar que existen varios estudiantes matriculados en un pequeño número de asignaturas pero pertenecientes a tres cursos diferentes; como se puede observar el estudiante 9, a pesar de estar matriculado únicamente en tres asignaturas, cada una pertenece a cursos diferentes; o el estudiante 11 también tiene matriculas en asignaturas de tres cursos diferentes que además no son consecutivos, pues corresponden a primero, tercero y cuarto curso.

A partir de la representación de la **Figura 1** se ve la necesidad de eliminar el concepto de curso por el de asignatura, y planificar de forma individual cada asignatura teniendo en cuenta los estudiantes matriculados en ella y el conjunto de asignaturas en las que se encuentra matriculado cada uno.

Cuando se trata de crear un calendario de exámenes de un grado presencial donde se dispone de un periodo de exámenes extenso, se suele basar en distribuir los exámenes de cada curso con la mayor dispersión posible a lo largo del periodo establecido. Además, teniendo en cuenta que existen estudiantes que pueden tener que examinarse de asignaturas de cursos diferentes, se pueden colocar asignaturas en franjas horarias[1] distintas o días de la semana diferentes. Esta planificación se suele realizar modificando

[1] Se utilizará el término franja horaria, o simplemente franja, a una combinación de día y hora dados en la que se puede planificar la realización de un examen.

de forma manual el calendario de un curso anterior para adaptarlo a posibles restricciones que surgen en el nuevo curso, por ejemplo la disponibilidad de laboratorios o docentes que vigilen los exámenes.

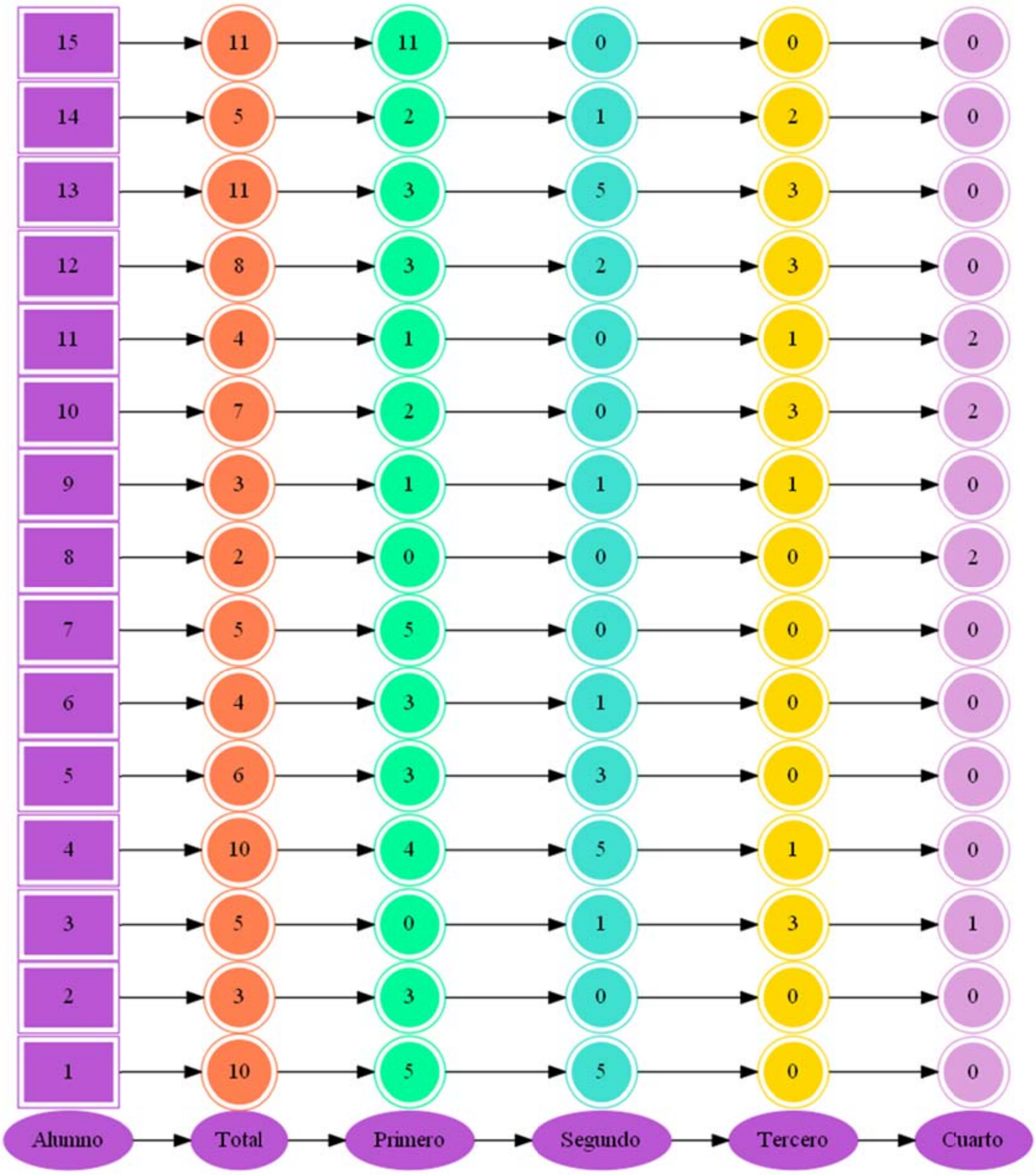


Figura 1: Distribución de matrícula por cursos de los estudiantes.

La planificación, tanto de los calendarios de exámenes como de los horarios académicos, para la formación presencial requiere de una gran cantidad de tiempo de personal cualificado que necesita tener experiencia en este tipo de actividad para conseguir resultados satisfactorios.

En el reto de la implantación de una nueva titulación con formación semipresencial, es necesario realizar una nueva gestión de la planificación, donde la ausencia de calendarios de exámenes de cursos anteriores plantea un nuevo reto muy motivador. Como se mencionó anteriormente, a diferencia de la planificación docente, la planificación de la evaluación semipresencial plantea retos novedosos. Una parte de la evaluación se realiza de forma asíncrona mediante la elaboración de trabajos, test, entregas, etc. realizados por los estudiantes siguiendo un modelo de evaluación continua a través del campus virtual que permita a los estudiantes tener información de su proceso de aprendizaje. Otra parte esencial se realiza de forma programada en las instalaciones, realizando un examen de evaluación presencial, físicamente en un aula.

Para la elaboración de estos calendarios de exámenes aplicados a estudiantes semipresenciales, se propone una solución radicalmente distinta debido a que las necesidades de estos estudiantes son también radicalmente distintas. Mientras los estudiantes presenciales requieren un calendario de exámenes con la mayor dispersión posible entre un examen y otro (para “repasar” el siguiente examen dentro del periodo establecido), para la docencia semipresencial se plantean necesidades diferentes, a saber:

- Estos estudiantes no pueden disponer de un periodo de exámenes de varias semanas pues sería incompatible con sus otras actividades, principalmente laborales.
- Su disponibilidad para acudir a la Universidad se suele limitar a los fines de semana cuando pueden compatibilizar presentarse a dichas evaluaciones presenciales físicamente.
- El estudiante en modalidad semipresencial se caracteriza por su dispersión geográfica. La proximidad de su residencia a la Universidad ha dejado de ser una restricción en la selecciona de la Universidad, siendo otros criterios como la calidad de la misma más significativa.

Por tanto, cuando se planifica un calendario de exámenes para estos estudiantes, además de restringir las convocatorias al fin de semana, se debe minimizar el número de fines de semana en que el estudiante debe desplazarse, ya que se puede encontrar a mucha distancia de su lugar de residencia. Por ello sería un buen objetivo que se redujese a un único fin de semana en el que obligatoriamente el estudiante deba desplazarse para realizar todos los exámenes.

Esto plantea un interesante problema: conseguir planificar todos los exámenes en el menor número de franjas horarias para estudiantes con una gran variedad de matrículas, y que no exista ningún solapamiento en los exámenes de ningún estudiante.

Para el ejemplo presentado resulta claro que, si el número de franjas horarias utilizadas para los exámenes es de 32, una solución trivial sería colocar cada examen en una franja distinta. Claramente esta solución no es una solución factible pues a una hora por examen se necesitarían 32 horas seguidas para acomodar todos los exámenes. Cualquier persona que se ha enfrentado en alguna ocasión a un problema de planificación de horarios de exámenes sabe que: si hay dos asignaturas que no tienen ningún estudiante en común se pueden planificar en la misma franja horaria simultáneamente.

En lo que sigue se tratará en primer lugar los fundamentos teóricos sobre el uso de la teoría de coloreado de grafos al problema planteado, y cómo se aplicaría a dicho problema. A continuación se tratarán las distintas estrategias de coloreado de grafos que pueden utilizarse para resolver el problema. A partir de las distintas estrategias podemos ver las soluciones que se generan de forma que se pueden comparar entre ellas. Con toda la información de aplicación de las distintas estrategias de coloreado se compararán las soluciones obtenidas. Por último se aplicarán las estrategias descritas con detalle para el problema ya presentado, a un conjunto de datos que se utiliza internacionalmente para comparar algoritmos de creación de calendarios de exámenes. De esta forma se puede comparar el comportamiento de estos algoritmos a problemas de gran complejidad.

3. Fundamentos teóricos

En esta sección se van a tratar los fundamentos básicos sobre teoría de grafos y en particular sobre el coloreado de grafos para crear un modelo teórico y una estructura matemática que permita implementar soluciones algorítmicas para resolver el problema planteado.

3.1.- Teoría de grafos

Un grafo G (Garey, Johnson & Stockmeyer, 1976) con n vértices[2] y m aristas[3] consiste en un conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y un conjunto de aristas $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Cada arista de $E(G)$ consta de dos vértices de $V(G)$. Podemos denotar una arista $e = xy$ donde x e y son los vértices extremos de la arista. Si la arista

[2] También denominados nodos en la literatura.
[3] También denominados arcos en la literatura.

$xy \in E(G)$ entonces se dice que x e y son vértices adyacentes. Un bucle es una arista cuyos vértices adyacentes son iguales. El grado de un vértice v es el número de aristas (que no sean bucles) de las que es extremo. (Brown & Corneil, 1987)

Las aristas múltiples (también llamadas aristas paralelas) son aristas que comparten el mismo par de vértices como extremo. Un grafo es no dirigido si para cada vértice $xy \in E(G)$ entonces $xy = yx$. Un grafo que no tenga bucles o aristas múltiples se denomina grafo simple. Está claro que todo grafo simple es un grafo pero no todo grafo es un grafo simple.

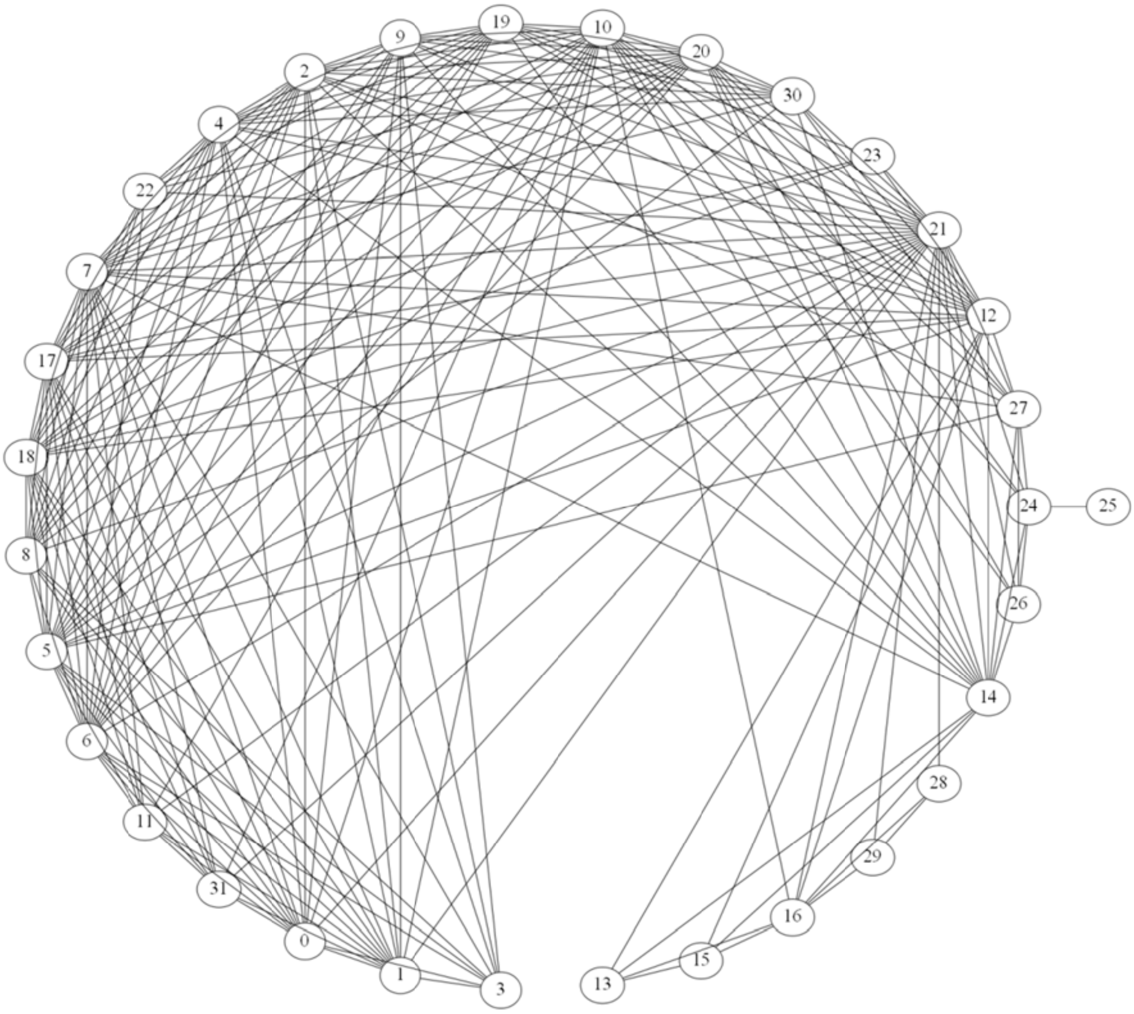


Figura 2: Grafo que representa el problema

Con la distinción anterior, un grafo G es finito, es decir, G tiene un número finito de vértices y un número finito de aristas, cuando no están permitidos los bucles ni las aristas múltiples. Puede observarse inmediatamente que el tipo de grafos que se genera para la planificación del calendario de exámenes se trata de un grafo simple finito. (Brown & Corneil, 1987).

La matriz de adyacencia de un grafo es una forma de representación de un grafo mediante una matriz. El grafo se representado por una matriz cuadrada M de tamaño n^2, donde n es el número de vértices. Si hay una arista entre un vértice x y un vértice y, entonces el elemento $m_{x,y}$ es 1, de lo contrario, es 0.

3.2.- Grafo que representa el problema de calendario de exámenes

En el problema planteado se representará cada examen como uno de los vértices del grafo y para representar la incompatibilidad de un examen con otro, es decir que los dos exámenes tienen al menos un estudiante en común, se representará mediante una arista que une ambos vértices. En la **Figura 2** se muestra el grafo que representa el problema presentado en la Figura 1. En la figura se puede ver claramente a la izquierda que existe una arista entre el nodo 24 y el nodo 25. Eso significa que al menos un estudiante se ha matriculado en las asignaturas 24 y 25.

Otra forma de representar el problema es mediante el uso de una matriz. El uso de una matriz permite una representación de los datos fácil de manejar automáticamente en un programa. Para ello se va a diseñar una matriz de conflictos para el problema, como una matriz cuadrada que tendrá como número de filas y columnas el número de asignaturas y cada elemento de la matriz a_{ij} indica el número de estudiantes que deben realizar el examen de la fila i y el examen de la columna j. La **Figura 3** muestra la matriz de conflictos del calendario de exámenes del problema planteado. Claramente se puede observar que se trata de una matriz simétrica, es decir $a_{ij} = a_{ji}$.

Es suficiente con que exista un único estudiante con dos asignaturas para que no se puedan planificar los dos exámenes en la misma franja. Cabe, entonces, considerar la representación del problema con una matriz booleana, con un 1 si existe conflicto y con un 0 si no existe conflicto. Esta nueva matriz, que se muestra en **Figura 4**, se corresponde con la matriz de adyacencia del grafo que ilustra el problema.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	2	0	1	1	1	2	2	2	1	1	2	2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	1	3	2	2	3	2	2	1	0	2	0	1	0	0	1	1	2	3	3	1	0	0	0	0	1	0	0	2	0
3	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	3	1	0	1	2	2	2	2	1	0	1	0	1	0	0	1	1	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	2	2	2	1	1	0	2	3	1	1	3	1	1	0	0	0	0	3	2	1	1	3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
6	2	2	2	1	2	2	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	2	2	1	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	2	2	3	1	2	3	2	0	1	2	2	1	2	0	1	0	0	1	1	1	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	2	1
8	1	1	2	1	2	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	2	1	2	1	1	2	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	1	2	1	0	1	3	1	2	0	1	0	2	3	0	4	0	1	3	2	2	2	5	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
11	1	2	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
12	0	0	2	0	1	1	0	2	0	1	3	0	0	1	4	1	2	1	1	2	2	4	0	1	0	0	0	1	0	0	2	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	4	0	4	1	0	1	2	0	0	1	2	3	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	2	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
17	1	1	1	0	1	3	2	1	1	0	3	1	1	0	0	0	0	0	4	3	1	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
18	1	1	1	0	1	2	2	1	1	0	2	1	1	0	0	0	0	4	0	2	1	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
19	0	0	2	0	2	1	1	1	1	1	2	0	2	0	1	0	0	3	2	0	2	3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
20	0	0	3	0	2	1	1	2	1	1	2	0	2	0	2	0	0	1	1	2	0	4	1	0	1	0	1	2	0	0	2	0
21	1	1	3	0	2	3	2	3	1	1	5	1	4	0	3	0	2	4	4	3	4	0	1	1	1	0	1	2	1	1	2	1
22	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
27	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2	2	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
30	0	0	2	0	1	1	0	2	0	1	1	0	2	0	1	0	0	0	0	1	2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
31	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 3: Matriz de conflictos de exámenes.

Una vez se dispone de un modelo matemático que representa el problema se puede utilizar la teoría de grafos para afrontarlo y buscar una solución. Para ello se van a utilizar soluciones matemáticas que ya han demostrado su utilidad para modelar y resolver problemas de este tipo.

3.3.- Teoría de coloreado de grafos

Dado un grafo G el coloreado de los vértices de un grafo G (Paquete & Stützle, 2002) es una función f de cada vértice de G a un conjunto C de colores. Un $k-coloreado$ de G es una función f que utiliza exactamente k colores y satisface la propiedad de que $f(x) \neq f(y)$ si los vértices x e y son adyacentes en G, o lo que es lo mismo, $xy \in E(G)$, y se dice entonces que el grafo es $k-coloreable$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
3	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
11	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
12	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
17	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
18	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
19	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
20	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
21	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
22	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
27	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
30	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
31	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 4: Matriz de adyacencia del grafo

Observe que si el grafo tiene bucles no se puede colorear, ya que al ser $f(x) = f(x)$ no puede tener dos colores diferentes.

El número cromático $\chi(G)$ de G es el mínimo número k tal que existe un $k-coloreado$ de G. Un clique k_r de G es un subgrafo de $r-vértices$ de G en el que cada par de vértices de k_r comparten una arista. Es fácil de comprobar que el tamaño de k_r de G es una cota inferior en el número cromático de G, ya que $\chi(K_r) = r$ y por tanto $\chi(G) \geq r$. (Brown & Corneil, 1987)

3.4.- Coloreado del grafo del problema

Para modelar el problema, como ya se ha tratado anteriormente, se considerará H un grafo con 32 vértices, uno por asignatura. Se denotarán los vértices con números enteros $V = \{0, 1, \ldots, 31\}$. El conjunto de aristas representa los conflictos para realizar dos exámenes en la misma franja. Se puede observar fácilmente que no existen ni bucles ni aristas múltiples.

En este contexto el problema de creación de un calendario de exámenes sin conflictos es equivalente a encontrar un $k - coloreado$ para este grafo que minimice el número de colores necesario.

Como se desea encontrar una planificación en que los estudiantes tengan que utilizar el menor número de franjas posibles, el número de colores debería ser el mínimo posible. Es decir, idealmente, deberíamos encontrar un $k - coloreado$ de H con $k = \chi(G)$.

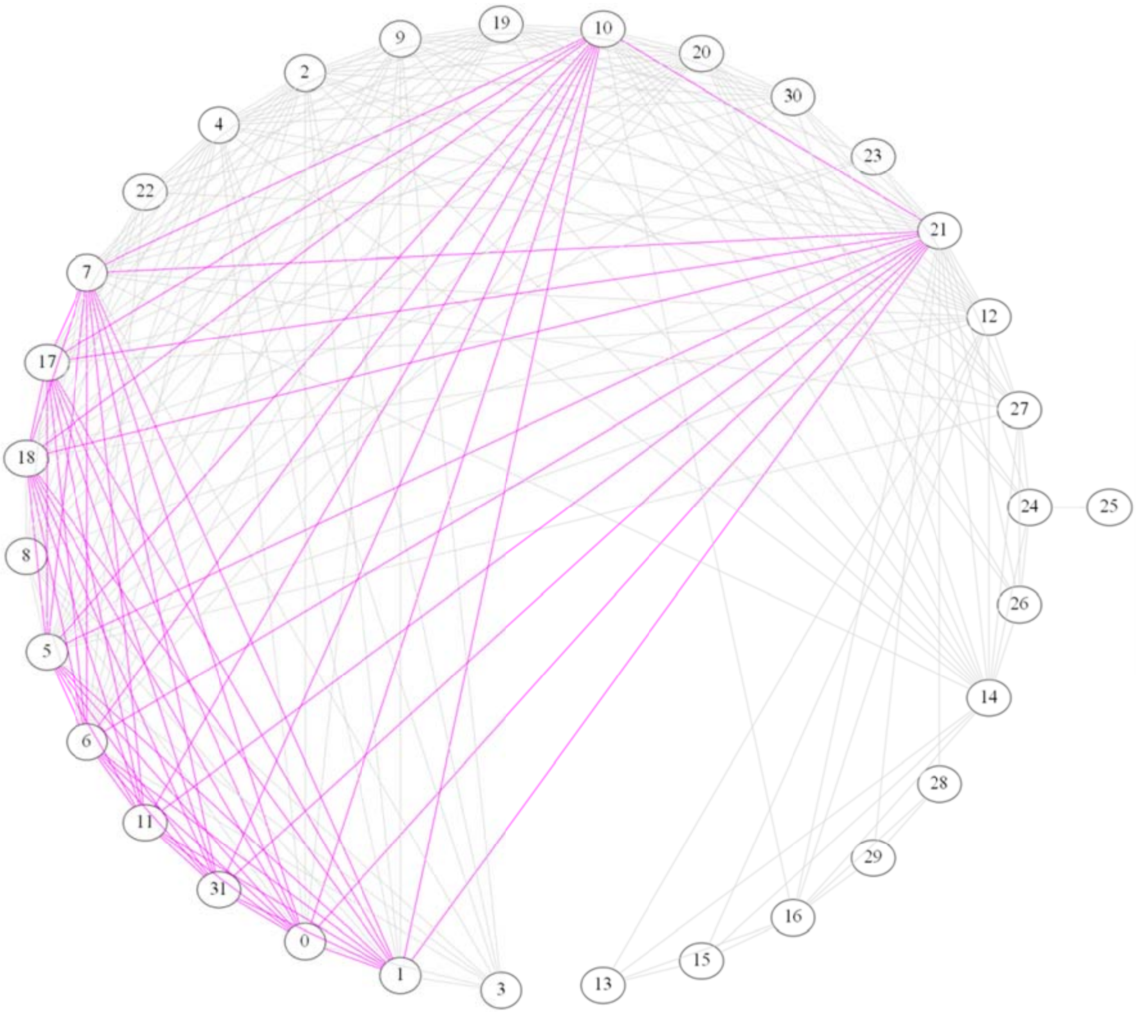


Figura 5: Clique k_{11} correspondiente a un estudiante con 11 asignaturas.

Podría parecer una tarea sencilla, pero el problema de coloreado de un grafo con el mínimo de colores posibles es un problema NP-duro para un grafo general y encontrar el número cromático de un grafo general es NP-completo (Paquete & Stützle, 2002; Burke, Kendall, Mısır & Özcan, 2004). En este sentido hay que utilizar las características del grafo en particular para encontrar una solución, aunque no existan garantías de que sea óptima.

Un hecho claramente intuitivo es que, si hubiese un único estudiante y modelamos H para este único estudiante, se tendría un grafo completo K_r donde r es el número de asignaturas en las que está matriculado el estudiante. Un grafo completo K_r es un grafo donde cada par de vértices está conectado por una arista. Es decir, ningún par de exámenes de ese estudiante se pueden planificar en una misma franja horaria y, por tanto, este grafo necesita r colores distintos para ser coloreado.

Cada estudiante tiene asociado un K_r como un subgrafo dentro de H. Si se considera al estudiante con más asignaturas matriculadas, como se mostró en la Figura 1, son los estudiantes 11 y 15 con 11 asignaturas, claramente 11 es una cota inferior para el coloreado del grafo. En la **Figura 5** se muestra el k_{11} correspondiente al estudiante 15 como un subgrafo de H.

De esta forma se puede tener la certeza de que si se encuentra un 11-coloreado para el grafo del problema H se habrá encontrado un coloreado mínimo para H. A priori no se puede saber si 11 es realmente el número cromático de H y, por tanto, si existirá una solución con únicamente 11 colores.

4. Algoritmo de coloreado

Recurrimos a un algoritmo de coloreado de grafos para encontrar una solución con el objetivo de comprobar el número de colores utilizado y ver si está cerca de la cota mínima establecida anteriormente. Los pasos de este algoritmo son los siguientes:

1. Realizar una ordenación de los vértices en una lista. La creación de esta lista, que proporciona un orden de coloreado a los vértices, es la que determina el orden de coloreado del grafo. La lista en que se dan los vértices es $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Así mismo, se elabora una lista con el conjunto de colores $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Resulta claro que el orden elegido no influye en la solución.
2. Proceso para asignación de colores:
   - Primer paso: a v_1 se le asigna el primer color disponible, c_1.
   - Segundo paso: Para colorear v_2, si es vecino de v_1 le asignamos el color c_2, si no es vecino de v_1 le asignamos el mismo color c_1.

- Tercer paso: para colorear v_3, comprobamos si es vecino de v_1 o v_2 y no podremos utilizar el color o colores que hayamos utilizado en los que sean vecinos suyos. Utilizamos un nuevo color.
- k-ésimo paso: ya se han coloreado los vértices $(v_1, \dots, v_{k-1})$. De la lista de colores descartamos los ya utilizados para los vértices adyacentes a v_k que ya hayan sido coloreados. De los colores restantes, se elige para v_k el primero disponible.

4.1.- Aplicación práctica

Se aplica este algoritmo al problema planteado, donde los vértices se encuentran ordenados por su número $\{0, 1, 2, \dots 31\}$. En el primer paso, a v_1 se le asignamos el color c_1. Para colorear v_2 no podemos utilizar el color c_1, pues es adyacente de v_1 (que ya ha sido previamente coloreado con el color c_1). Por tanto, de la paleta se descarta c_1, y se le asigna el color c_2. El vértice v_3 solo tiene un vértice adyacente que ya haya sido coloreado, el v_2 con el color c_2 por lo que se le asigna el color c_1. Este proceso se repite como indica el algoritmo hasta completar todos los vértices utilizando los n primeros colores del conjunto.

El tipo de algoritmos como el utilizado para colorear el grafo se denominan algoritmos ávidos. Después de establecer un orden coge el siguiente vértice e intenta asignarle un color de los utilizados hasta el momento. Si no es posible con los colores utilizados hasta el momento utiliza un nuevo color y se lo asigna al vértice. Siempre que los vértices estén en el mimo orden se obtendrá el mismo coloreado. En la **Figura 6** se muestra el grafo ya coloreado con el algoritmo.

A efectos del artículo se van a utilizar el siguiente conjunto de colores: $C = \{“coral”, ”mediumspringgreen”, ”turquoise”, ”gold”, ”red”, "blue", "green", "yellow", "cyan", "purple", "pink", "plum", "orchid", "beige", "yellowgreen", "grey"\}$. Obviamente el conjunto de colores es arbitrario. Se ha elegido un conjunto con $|C| = 15$, porque desconocemos el número cromático del grafo y éste puede ser un número suficiente para encontrar una planificación para el problema.

Como se puede observar en la **Figura 6**, para colorear el grafo se han utilizado 13 colores distintos. Por tanto, se ha encontrado una solución que permite encontrar una planificación de los exámenes en 13 franjas distintas. Pero surgen las siguientes preguntas: ¿Cómo de buena es esta solución? ¿Es la solución óptima?

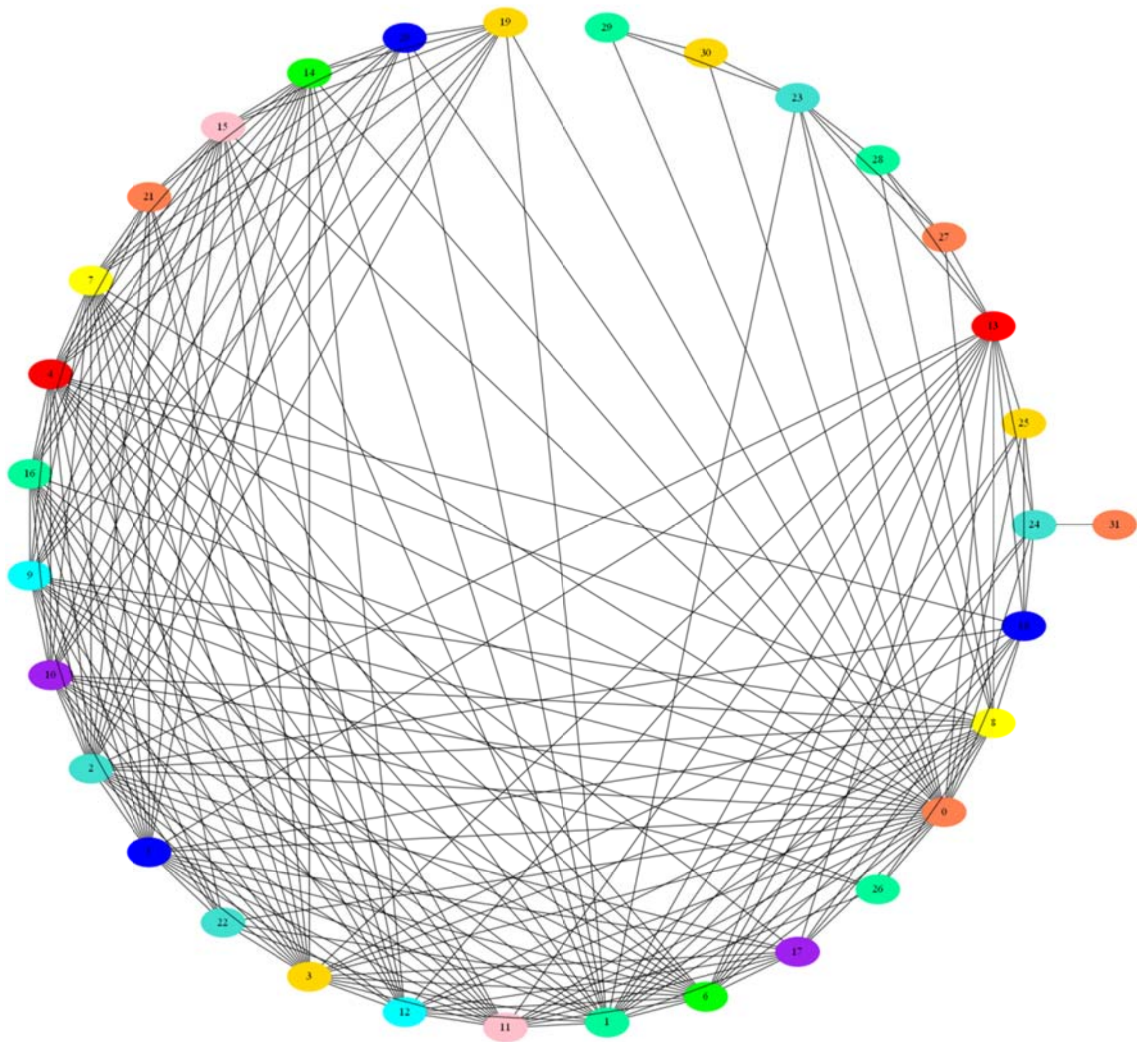


Figura 6: Grafo coloreado

Como ya se ha indicado, si el número de colores utilizado hubiese sido 11, como es un mínimo teórico, (pues como ya se vio contiene un k_{11} como subgrafo), se habría encontrado una solución óptima. En este momento no se puede saber si se podría encontrar una coloración que pudiese utilizar menos colores (11 ó 12) y así reducir el número de franjas necesarias para la planificación de los exámenes.

5. Estrategias de ordenación

Como se ha tratado en la sección anterior, el algoritmo de coloreado es determinista para una ordenación inicial de los vértices. Si se parte de la misma ordenación se obtendrá la misma solución de coloreado. Pero para ordenaciones diferentes se podrán obtener soluciones diferentes. Por lo tanto, cuando sea necesario encontrar una coloración óptima con el número cromático para nuestro grafo H se debería encontrar una ordenación que produzca esta coloración. En este sentido, encontrar la coloración óptima es el mismo problema que encontrar una ordenación óptima. Pero el procedimiento para encontrar la ordenación óptima (o una de ellas), consiste en considerar cada una de las posibles y aplicar repetidamente el algoritmo y seleccionar la de mejor resultado. Si el problema presentado (que es pequeño) es de un grafo con 32 vértices existen $32! \approx 2.10^{35}$ combinaciones posibles de estas ordenaciones. Este número es excesivamente grade para realizar una evaluación exhaustiva de todas las posibles ordenaciones, incluso para el problema utilizado.

En las siguientes secciones, se tratará cómo se comporta el algoritmo con distintas ordenaciones de los vértices, de forma que permita obtener conclusiones con respecto a la influencia que tienen las distintas ordenaciones en la calidad del resultado de la planificación de los exámenes.

5.1.- Ordenación aleatoria:

En primer lugar se van a realizar algunas ejecuciones del algoritmo de coloreado con ordenaciones aleatorias de los vértices:

5.1.1.- Primera ordenación aleatoria:

Se realiza una ordenación aleatoria de los vértices y se aplica el algoritmo de coloreado. En la **Figura 7** se muestra el resultado de la coloración obtenida. En la figura se han agrupado los vértices por colores para comprobar que se utilizan 13 colores o franjas para colorear el grafo. Para poder comparar las soluciones encontradas en la

Figura 8 se muestra un histograma del número de exámenes planificados en cada franja. Como se puede observar de este coloreado, los exámenes se agrupan en algunas franjas, hay cuatro franjas con un único examen y una franja con 6 exámenes.

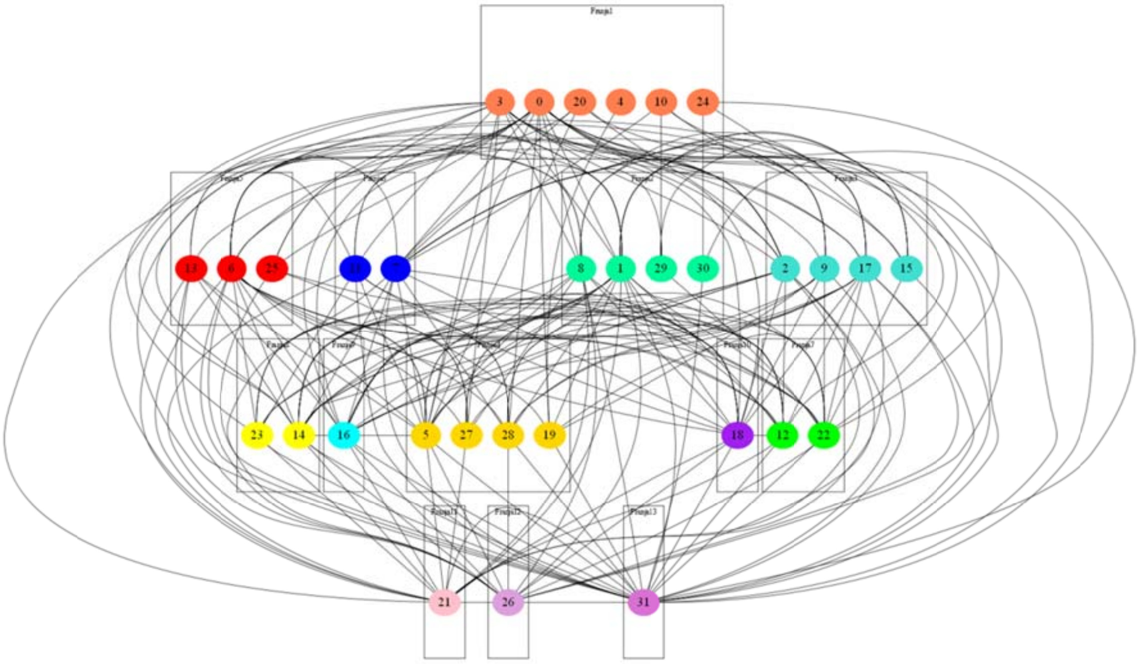


Figura 7: Coloreado con 13 colores

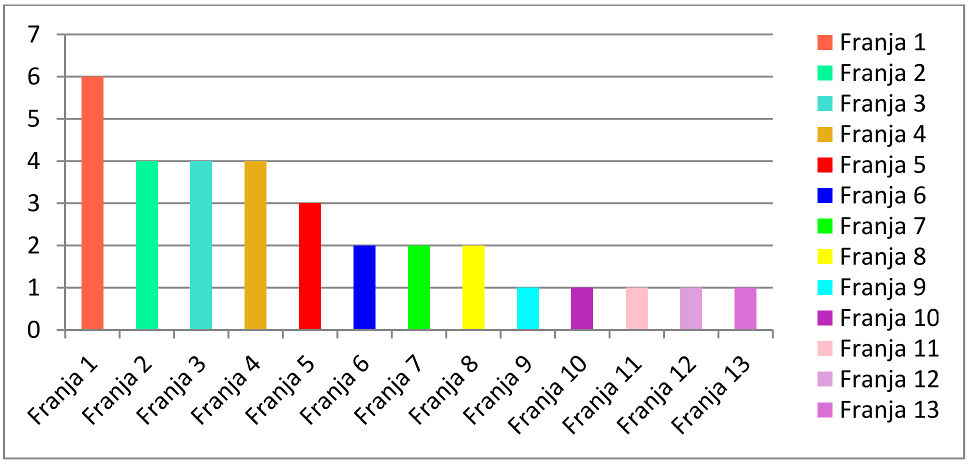


Figura 8: Distribución por franjas en una ordenación aleatoria

5.1.2.- Segunda ordenación aleatoria:

En una segunda ejecución con otra ordenación aleatoria de los vértices se obtiene una coloración peor que la anterior, ya que utiliza 15 colores distintos. Se puede ver este nuevo resultado de coloración en la **Figura 9**. En la **Figura 10** se muestra la distribución de exámenes por franjas. Se observa de nuevo una mala distribución de los exámenes, además de tener un número muy elevado de franjas, 15. La mayoría de los exámenes se agrupan en dos franjas y hay siete franjas con un único examen.

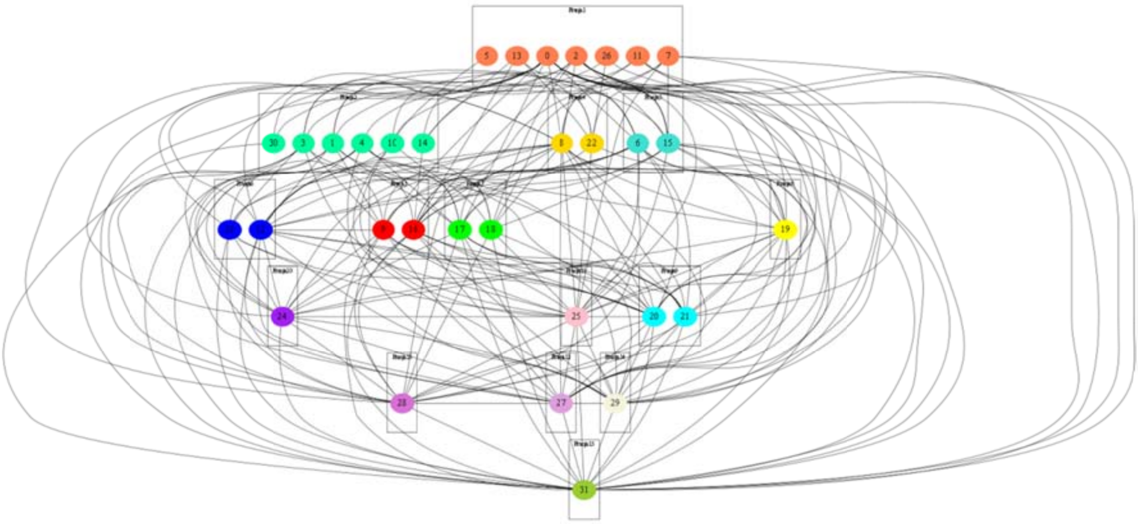


Figura 9: Coloreado con 15 colores

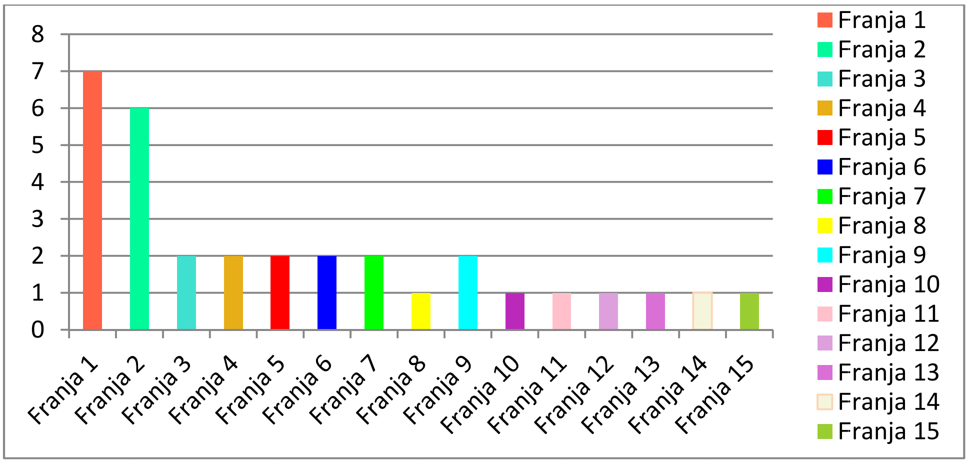


Figura 10: Distribución por franjas en una ordenación aleatoria

De estos ejemplos se observa que las ordenaciones aleatorias pueden generar resultados muy diferentes, por lo que se deben estudiar diferentes estrategias que puedan ofrecer resultados con un mínimo de garantía de calidad en la solución. A continuación se muestran estrategias de ordenación de los vértices que intentarán minimizar el número de colores posibles.

5.2.- Primero el de mayor grado

"Primero el de mayor grado": Con esta estrategia se ordenan los vértices por su grado, en orden descendente, primero los de mayor grado. Esta estrategia se basa en que los vértices con mayor grado tienen un mayor número de conflictos y, por tanto, serán más difíciles de colorear, mientras los vértices con menor grado tienen menos conflictos con otros vértices y, por tanto, es más fácil asignarles un color de los disponibles.

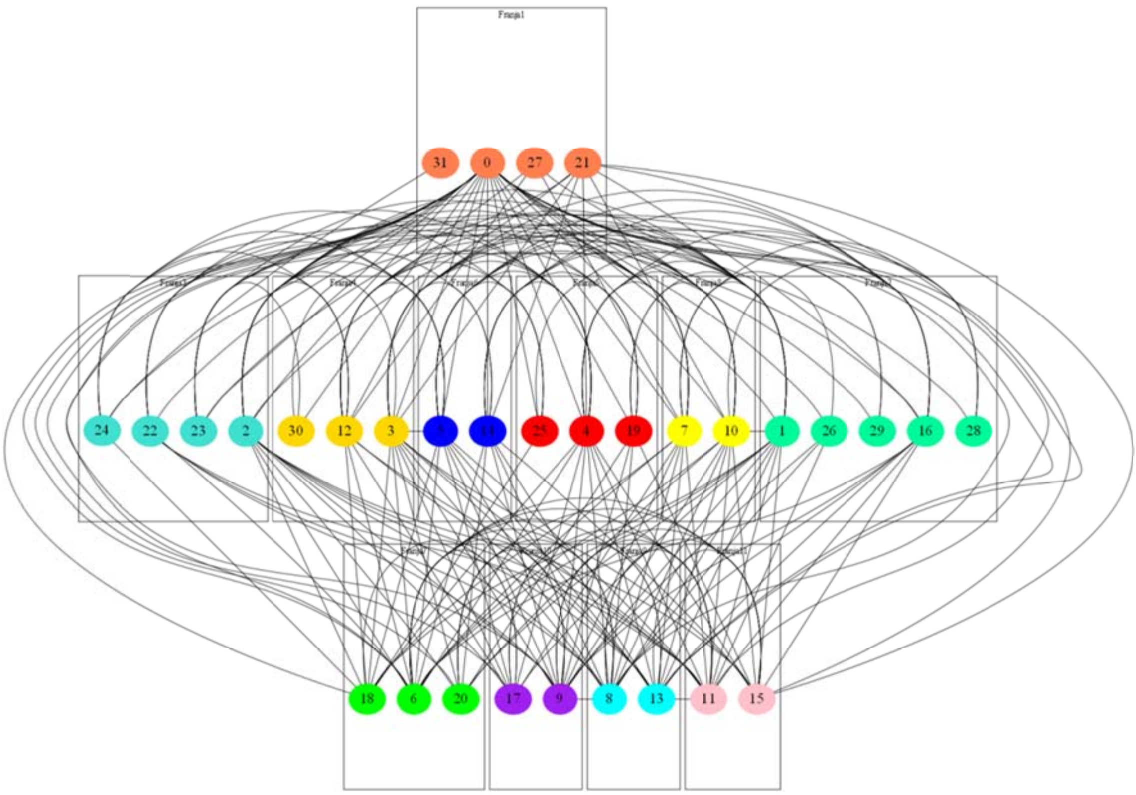


Figura 11: Coloreado con 11 colores utilizando "Primero el de mayor grado"

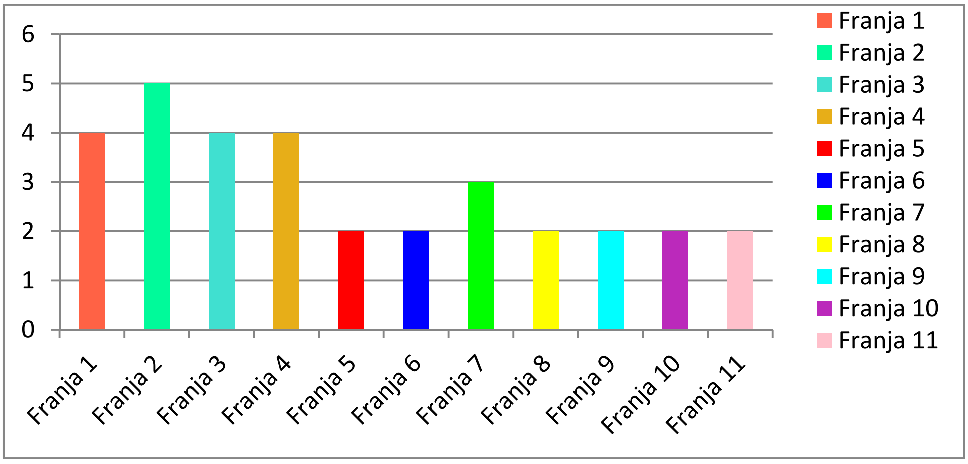


Figura 12: Distribución de la ordenación "Primero el de mayor grado"

El resultado de coloreado con esta estrategia se muestra en la **Figura 11** necesitándose únicamente 11 colores, por tanto se ha obtenido una coloración óptima igual a la cota mínima por lo que el número cromático $\chi(H)$ del grafo que representa el problema es 11. En la **Figura 12** se muestra la distribución por franjas de esta solución.

5.3.- Primero el de mayor número de estudiantes

"Primero el de mayor número de estudiantes": En esta estrategia se ordenan los vértices por el número de estudiantes matriculados en la asignatura que representa al vértice, en orden descendente, primero las asignaturas con mayor número de estudiantes matriculados. La idea del algoritmo es similar a la anterior donde los que tienen más estudiantes matriculados tendrán más posibilidades de entrar en conflicto con otros vértices y, por tanto, serán más difíciles de colorear, dejando para el final los vértices menos conflictivos por tener menos estudiantes y por tanto más fácil de asignarles un color. En la **Figura 13** se muestra el coloreado del grafo obtenido. Para esta solución se han tenido que utilizar 12 colores. En la **Figura 14** se muestra su correspondiente distribución por franjas.

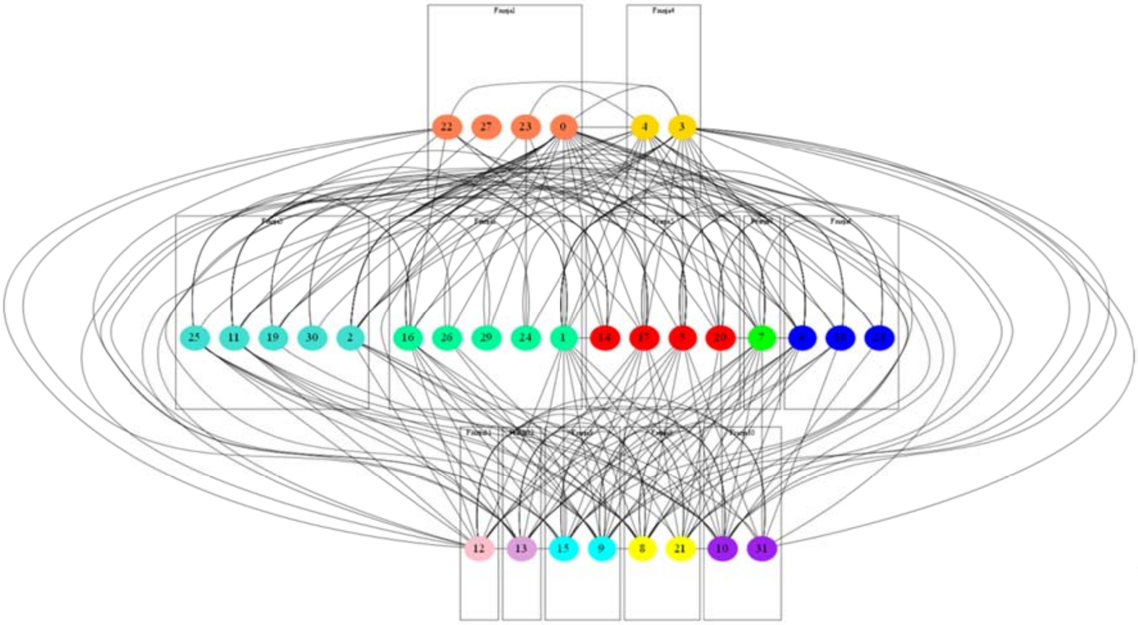


Figura 13: Coloreado con 12 colores utilizando “Primero el de mayor número de estudiantes”

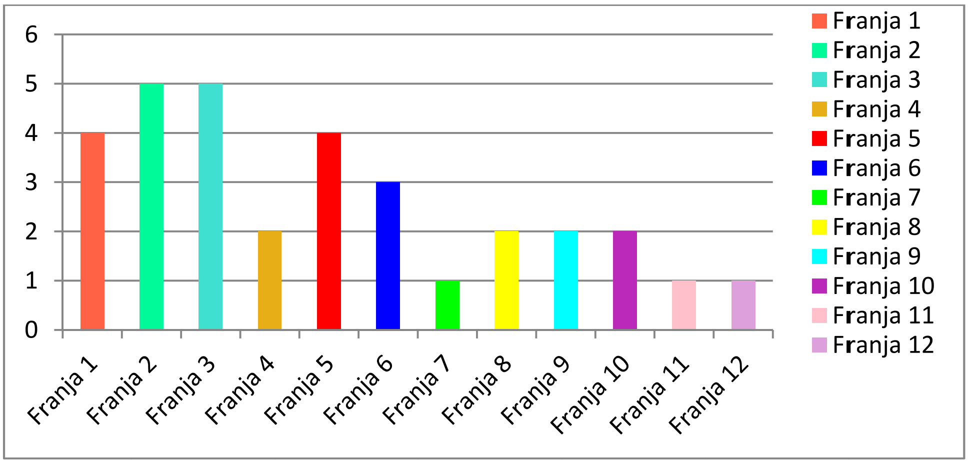


Figura 14: Distribución de la ordenación “Primero el de mayor número de estudiantes”

5.4.- Primero el de mayor grado y mayor número de estudiantes

"Primero el de mayor grado y mayor número de estudiantes": En esta estrategia se utiliza una combinación de las dos anteriores, donde se ordenan los vértices por el de mayor grado, en orden descendente y, como es posible que existan vértices con el mismo grado se utiliza un segundo criterio de ordenación por el número de estudiantes matriculados. Los motivos utilizados para esta ordenación son los mismos que para las dos anteriores: intentar asignar primero colores a los vértices más conflictivos y por tanto que son más difíciles de colorear. En la **Figura 15** se muestra el resultado de coloreado con este algoritmo. Como se puede observar se utilizan 11 colores, por lo que es también una solución óptima para el problema. En la **Figura 16** se muestra su correspondiente distribución por franjas.

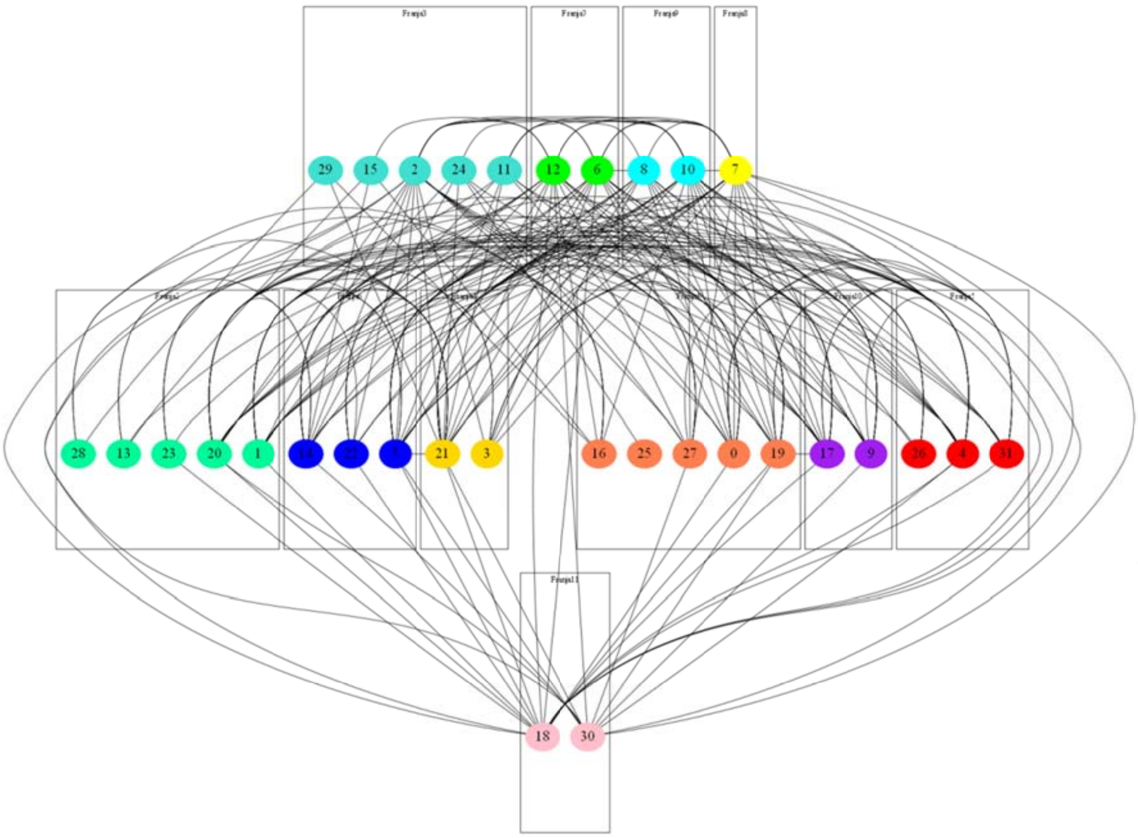


Figura 15: Coloreado con 11 colores utilizando "Primero el de mayor grado y mayor número de estudiantes"

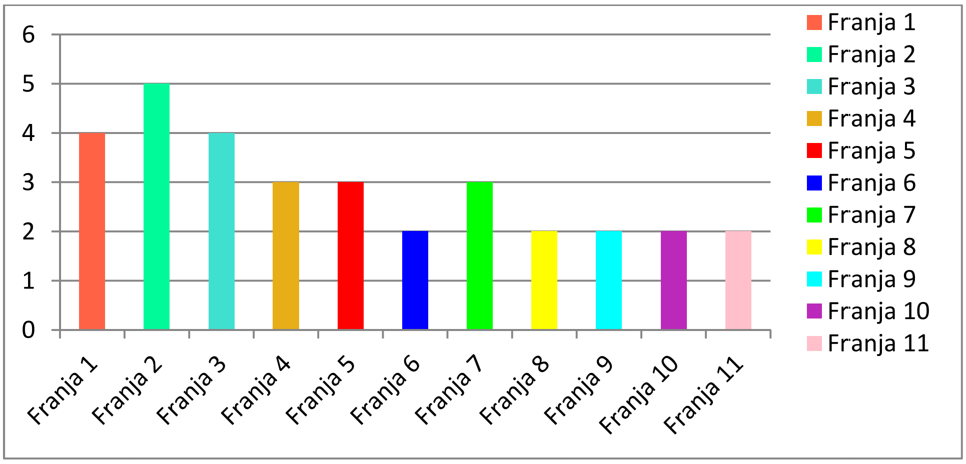


Figura 16: Distribución de la ordenación "Primero el de mayor grado y mayor número de estudiantes"

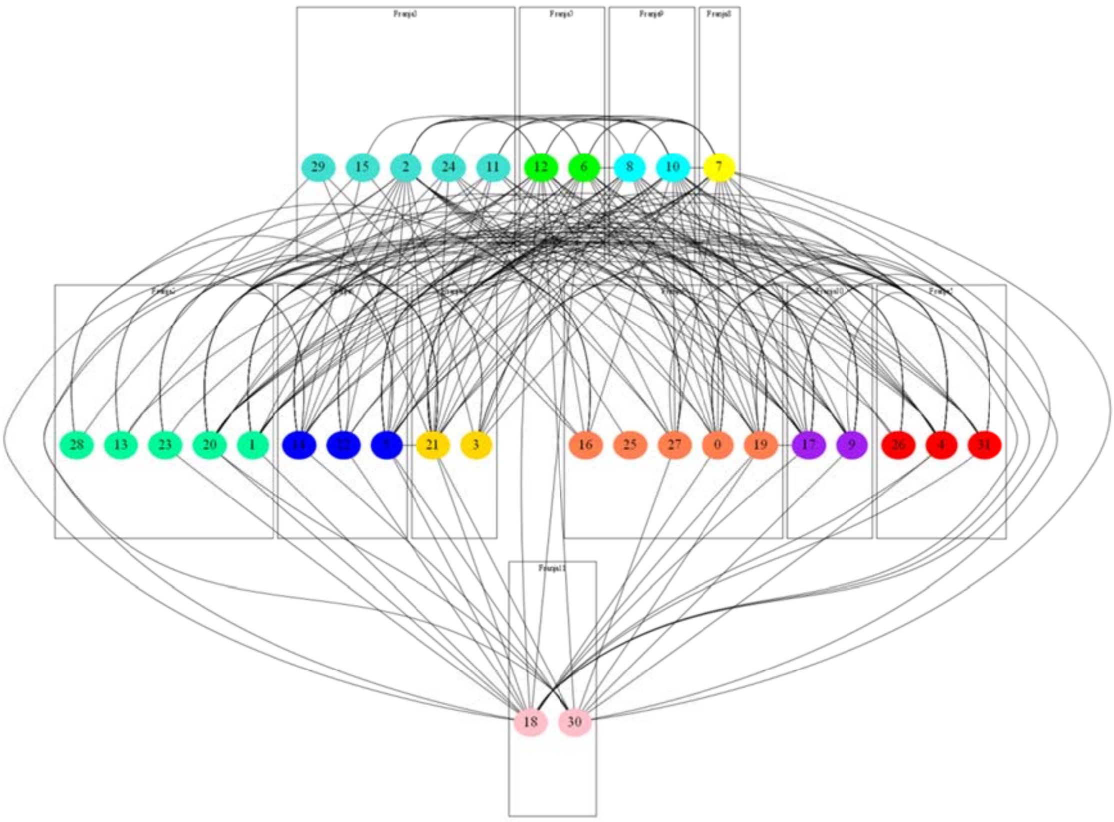


Figura 17: Coloreado con 11 "Grado de saturación de los vértices"

5.5.- Grado de saturación de los vértices

"Grado de saturación de los vértices": El grado de saturación de un vértice se define como el número de vértices adyacentes de diferente color. O lo que es lo mismo, cuando se intenta asignar un color a un vértice, no se le puede asignar uno de los ya asignados a los vértices adyacentes coloreados. En cada paso del algoritmo hay que ordenar los vértices por orden de saturación, pasando a colorear el primero de la lista, el más saturado y por tanto el que dispone de menos opciones de colores. Se trata, por tanto, de una estrategia de ordenación dinámica para los vértices, ya que no se tiene una ordenación que se mantiene desde el principio. En la **Figura 17** se muestra el resultado de coloreado con este algoritmo. De nuevo se ha obtenido un resultado que utiliza únicamente 11 colores. La distribución por franjas de los exámenes se muestra en la **Figura 18**.

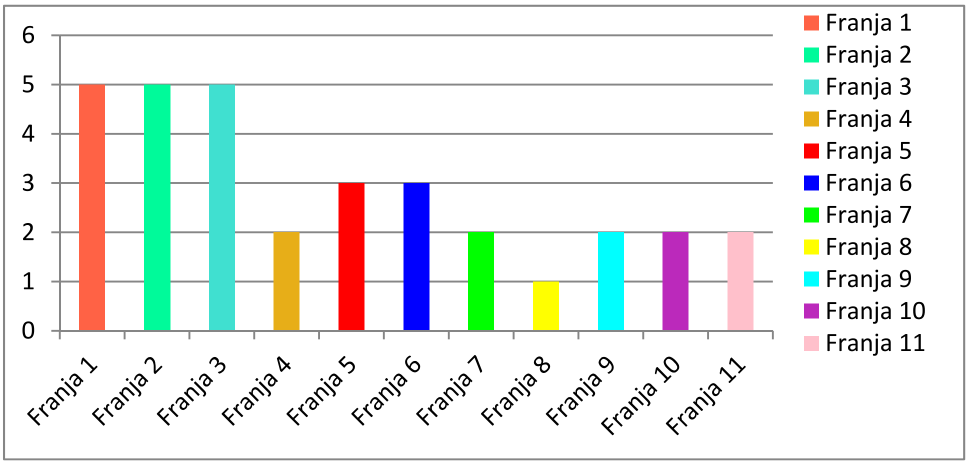


Figura 18: Distribución de la ordenación "Grado de saturación de los vértices"

6. Análisis de los resultados

Como se puede observar, no todas las estrategias de ordenación resultan igualmente favorables para conseguir buenos resultados. El uso de una ordenación arbitraria o lo que es lo mismo no realizar ninguna ordenación no proporciona un resultado satisfactorio e incluso pueden obtenerse resultados muy mejorables como en el segundo ejemplo de ordenación aleatoria que proporcionaba una solución en la que se necesitan 15 franjas para planificar los exámenes. Por tanto, se necesita una buena estrategia de ordenación que proporciona mejores resultados.

Analizando las cuatro diferentes estrategias de ordenación, con tres de ellas se encuentran soluciones con 11 franjas, mientras que con la ordenación “Primero el de mayor número de estudiantes” se necesitan 12 franjas. Al intentar comparar los tres resultados en los que se utilizan 11 franjas vemos que no aparecen diferencias significativas de una solución respecto a otra.

Se va a elegir como ejemplo la planificación que se obtiene con una ordenación por “Grado de saturación de los vértices” que realizaba una ordenación dinámica de los vértices. En la

Figura 19 se muestra el calendario de exámenes resultante para cada alumno. En esta figura los alumnos se muestran en la primera columna numerados del 1 al 15, y en cada columna se representa una franja horaria. Cada uno de los exámenes se ha representado con un color diferente. Así, por ejemplo, en la franja 11, la última franja, se han planificado 2 exámenes diferentes, el 19 y el 31.

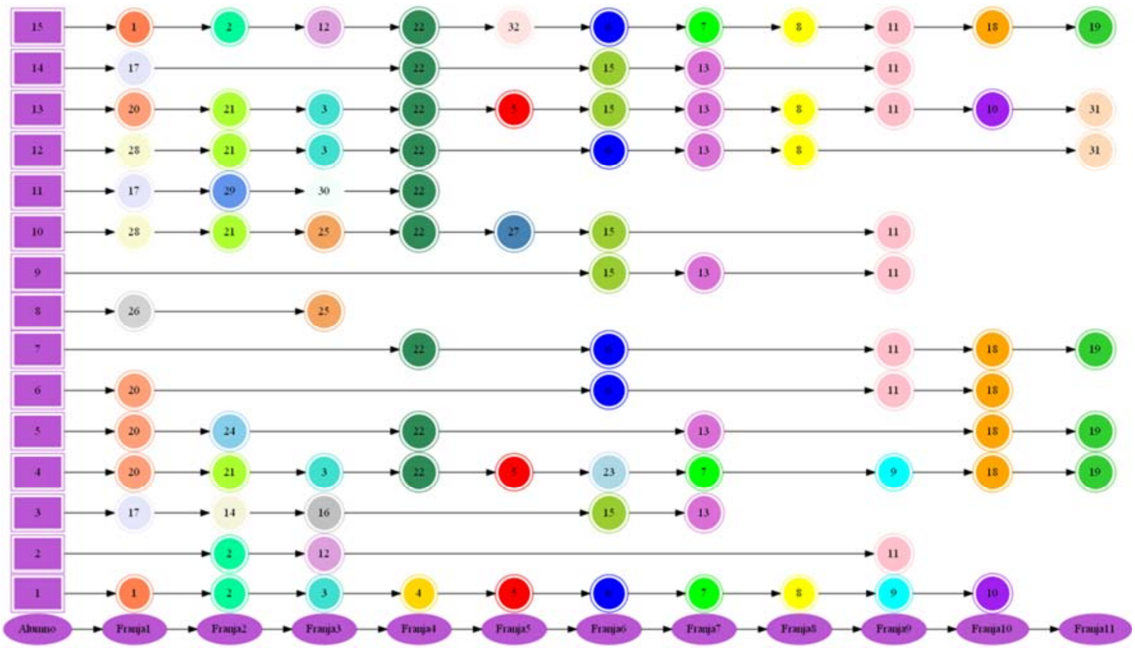


Figura 19: Planificación del calendario de exámenes obtenida con el método “Grado de saturación de los vértices”

7. Aplicación a problemas más complejos

Como se ha podido observar con el problema planteado, se encuentran soluciones óptimas utilizando el algoritmo de coloreado de grafos. De hecho tres de las cuatro soluciones son muy similares y no podríamos afirmar cuál de los algoritmos es mejor. Se podría pensar que se debe a que un grafo de 32 vértices no es suficientemente complejo para establecer una comparativa entre las soluciones obtenidas.

Para poder comparar las distintas estrategias de coloreado es necesario aplicar los algoritmos a problemas más complejos. Para ello se van a utilizar los conjuntos de datos habituales en la literatura para comparar algoritmos de generación de calendarios de exámenes. El más utilizados es el conjunto de datos de Toronto (Carter, Laporte & Lee, 1996). Consta de trece problemas de horarios de exámenes reales. Para estos conjuntos de datos se requiere que no haya coincidencia de exámenes para ningún estudiante y que se distribuyan unos exámenes respecto a otros, penalizando si un estudiante tiene exámenes en franjas horarias muy seguidas.

Aunque no es objetivo de nuestro problema se pueden utilizar los conjuntos de datos que proporcionan para comparar el comportamiento de las distintas estrategias. Por otra parte, junto con los conjuntos de datos que proporcionan se indica el número de franjas horarias en las que se deben planificar los exámenes. Por tanto se obtendría un buen resultado si el número de colores necesarios fuese inferior o igual al proporcionado para el problema.

En la tabla de la Figura 20 se muestran las características de cada uno de los trece problemas del conjunto de datos de Toronto indicando el número de exámenes a planificar, el número de estudiantes matriculados, el número de matrículas distintas realizadas por los estudiantes y el número de franjas en que se ha establecido que se deben planificar los exámenes. Se puede observar que algunos de los problemas son de gran tamaño, con más de 10.000 estudiantes. En la parte derecha de la tabla se muestran los resultados obtenidos con las cuatro estrategias ya mostradas, ordenación por mayor grado de los vértices, ordenación por mayor número de alumnos matriculados en la asignatura que representa el vértice, ordenación por mayor grado y mayor número de alumnos matriculados en la asignatura que representa el vértice y la ordenación dinámica de grado saturación de los vértices. En las últimas dos columnas se incluyen el mejor y peor de los resultados obtenidos en 10 ordenaciones aleatorias.

	Número de exámenes	Número de estudiantes	Número de matriculas	Franjas propuestas	Mayor grado	Mayor número de estudiantes	Mayor grado y número de estudiantes	Grado de saturación de los vértices	Aleatoria (peor de diez)	Aleatoria (mejor de diez)
Problema 1	543	18419	55522	32	**32**	34	**32**	**32**	45	43
Problema 2	682	16925	56877	35	35	36	35	**33**	49	45
Problema 3	190	1125	8109	24	25	25	26	25	34	29
Problema 4	81	2823	10632	18	20	22	20	20	23	21
Problema 5	461	5349	25113	20	**20**	21	**20**	**20**	27	24
Problema 6	381	2726	10918	18	19	20	19	19	25	23
Problema 7	2419	30029	120681	42	**36**	41	38	**36**	56	53
Problema 8	486	11483	45051	23	25	26	25	**23**	29	26
Problema 9	139	611	5751	13	**13**	**13**	**13**	**13**	15	**13**
Problema 10	261	4360	14901	23	**23**	**22**	**23**	**23**	30	27
Problema 11	622	21266	58979	35	36	35	36	**34**	49	44
Problema 12	184	2750	11793	10	11	**10**	11	11	14	12
Problema 13	181	941	6034	21	23	25	23	22	29	26

Figura 20: Tabla de resultados

En la tabla se han destacado en negrita los mejores resultados encontrados cuando se satisface la restricción de ser inferior o iguales al número de franjas propuestas para resolver el problema.

Lo primero que se observa es que los resultados obtenidos cuando no se utiliza ningún tipo de ordenación son muy pobres, únicamente una de las ejecuciones con ordenación aleatoria proporciona una solución adecuada.

Se puede observar claramente que cualquiera de las estrategias de ordenación proporciona mejores resultados que la no ordenación, es decir, manteniendo el orden en que se leen los datos.

Entre las distintas estrategias de ordenación la que obtiene mejores resultados es la ordenación por grado de saturación de los vértices. Esta ordenación es la que permite obtener el mejor resultado en 8 de los 9 problemas en los que se ha conseguido una solución satisfactoria al número de franjas propuestas y ofrece también la mejor solución en los cuatro casos restantes. Únicamente en el problema 13 es superada por la estrategia de ordenación de mayor número de estudiantes a pesar de ser esta la estrategia de ordenación que peores resultados ofrece para el resto de los problemas.

8. Conclusiones

El problema de generación de calendarios de exámenes es un problema complejo al que se deben dar soluciones rápidas y eficaces. En este artículo se trata cómo afrontar el problema de planificación de los exámenes dadas las características especiales de la programación de los mismos para estudiantes de formación semipresencial, de forma que se pueda realizar en el menor número de franjas posibles.

El uso de la Teoría de Grafos y en particular el coloreado de grafos aporta una solución relativamente sencilla de implementar para obtener una solución al problema. El número de colores necesarios para colorear el grafo se corresponde con el número de franjas necesarias para planificar los exámenes. Aunque el problema puede parecer sencillo, obtener el número mínimo de colores es un problema NP-Completo.

Se puede establecer una cota mínima igual al igual al número de asignaturas del alumno matriculado en el mayor número de ellas. Sin embargo, no se puede conocer fácilmente si este número es el óptimo, ya que puede que no exista ningún coloreado con ese número de colores.

De las pruebas realizadas se puede comprobar que es muy importante utilizar una estrategia de ordenación de los vértices del grafo para obtener una buena solución. La estrategia más adecuada que se ha obtenido es “Grado de saturación de los vértices”. En el problema de planificación de exámenes planteado se muestra igual de eficiente que la ordenación por grado de los vértices y ordenación por grado de los vértices y número de alumnos, pero en su ejecución con el conjunto de datos de exámenes de Toronto, que son datos reales se muestra muy superior.

Bibliografía

Brown, Jason I. y Derek G. Corneil (1987): «On generalized graph colorings», Journal of Graph Theory, 11/1, pp. 87-99.

Burke, Edmund K., Graham Kendall, Mustafa Mısır y Ender Özcan (2004): «Applications to timetabling», En Handbook of Graph Theory, chapter 5.6.

Carter, Michael W., Gilbert Laporte y Sau Yan Lee (1996): «Examination timetabling: Algorithmic strategies and applications», Journal of the Operational Research Society, 47/3, pp. 373–383.

Moreno, Pilar y Sánchez, Jesús (2017): «Revisión de algoritmos de búsqueda aplicadas al problema de creación de calendarios de exámenes», En Tecnología y Desarrollo, Volumen XV. Universidad Alfonso X el Sabio, ISSN 1696-8085.

Moreno, Pilar, Sánchez, Jesús y García, Almudena (2007): « Aplicación de las técnicas de Enfriamiento lento al problema de planificación de horarios», En Tecnología y Desarrollo, Volumen V. Universidad Alfonso X el Sabio, ISSN 1696-8085.

Paquete, Luis y Thomas Stützle (2002): «An experimental investigation of iterated local search for coloring graphs», En Workshops on Applications of Evolutionary Computation, Springer, pp. 122–131.