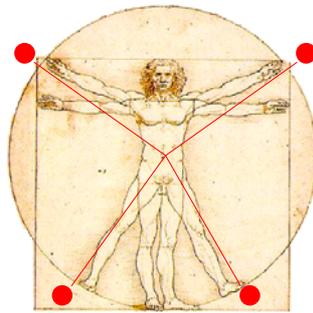


TECNOLOGÍ@ y DESARROLLO

Revista de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente

VOLUMEN II. AÑO 2004

SEPARATA



CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DEL MATERIAL ÓSEO.

Esther Rincón Rincón, Antonio Ros Felip, Rafael Claramunt Alonso, Fernando Arranz Merino.



UNIVERSIDAD ALFONSO X EL SABIO
Escuela Politécnica Superior

Villanueva de la Cañada (Madrid)

© Del texto: Esther Rincón Rincón, Antonio Ros Felip, Rafael Claramunt Alonso, Fernando Arranz Merino.

Junio, 2004

http://www.uax.es/publicaciones/archivos/TECTIN04_002.pdf

© De la edición: *Revista Tecnológí@ y desarrollo*

Escuela Politécnica Superior.

Universidad Alfonso X el Sabio.

28691, Villanueva de la Cañada (Madrid).

ISSN: 1696-8085

Editor: Julio Merino García tecnologia@uax.es

No está permitida la reproducción total o parcial de este artículo, ni su almacenamiento o transmisión ya sea electrónico, químico, mecánico, por fotocopia u otros métodos, sin permiso previo por escrito de la revista.

Tecnológí@ y desarrollo. ISSN 1696-8085. Vol.II. 2004.

CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DEL MATERIAL ÓSEO.

Esther Rincón Rincón^a, Antonio Ros Felip^b, Rafael Claramunt Alonso^b, Fernando Arranz Merino^a

^{a)} Dr Ing. Industrial. Departamento de Tecnología Industrial, Escuela Politécnica Superior. Universidad Alfonso X el Sabio. Avda. de la Universidad nº1, Villanueva de la Cañada, 28691 Madrid. España.
Tlf.:918109200, email: erincon@uax.es

^{b)} Dr Ing. Industrial. E.T.S.I. Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid. C/ José Gutiérrez Abascal, 2. 28006 Madrid. Tlf. 913363192. E-mail: aros@etsii.upm.es.

RESUMEN: El presente estudio se enmarca en la determinación de las características mecánicas del material óseo, punto crítico en la definición de un modelo numérico que permita predecir su comportamiento mecánico, así como su evolución ante posibles variaciones estructurales. Se trata de un material muy complejo, cuyas características mecánicas no son homogéneas, por lo que en una primera aproximación al problema se estudia por separado la zona cortical y la esponjosa, ya que su estructura es completamente distinta. Y en ambos casos se analizan las características mecánicas dependiendo de la anisotropía del hueso. En la zona cortical el hueso suele presentar isotropía transversal, o puede comportarse como un material ortotrópico, mientras que la zona esponjosa es mucho más compleja, pudiendo presentar un comportamiento prácticamente isótropo en unas zonas, y completamente anisótropo en otras, dependiendo de los esfuerzos que actúen en cada zona.

PALABRAS CLAVE: Biomecánica, Módulo de elasticidad, Coeficiente de Poisson, límite elástico, Matriz de rigidez, hueso cortical, hueso esponjoso, anisotropía.

ABSTRACT: This paper is based on the determination of the mechanical properties of bone material, which is the critical point in the definition of any numerical model that can be used to study the mechanical behaviour of bone, as well as the evolution after structural modifications. Bone can be considered as a very complex material, with non-homogeneous mechanical properties, so that two different zones, cortical and trabecular, have to be studied separately, as the structure of both of them is completely different. And in both cases mechanical properties have to be studied depending on the bone anisotropy. Cortical bone usually shows transversal isotropy, or even orthotropic behaviour, while trabecular bone is much more complex, with an isotropic mechanical behaviour in some zones, and completely anisotropic in others, depending on the stress applied on each one.

KEY-WORDS: Biomechanics, Elastic modulus, Poisson coefficient, yield stress, stiffness matrix, cortical bone, trabecular bone, anisotropy.

1. Introducción

El material óseo es un material radicalmente distinto a cualquier otro tratado por la mecánica clásica. Su estructura es heterogénea y anisótropa, y sus propiedades mecánicas varían no sólo entre distintos individuos, sino, para un mismo individuo el hueso es capaz de evolucionar modificando sus propiedades en función del tipo de solicitaciones a que se vea sometido. Es más, el hueso es capaz de regenerarse en caso de fractura, o, por el contrario, de alterar sus propiedades mecánicas ante procesos patológicos graves, o simplemente con la edad.

A pesar de su complejidad, el conocimiento del comportamiento mecánico del material óseo es fundamental a la hora de abordar el estudio de las actuales prótesis, ya que la clave para que éstas no presenten problemas en su funcionamiento consiste en que el comportamiento mecánico del conjunto sea similar considerando la estructura con y sin prótesis.

Pero las leyes de la mecánica se han formulado utilizando modelos y abstracciones que en la mayoría de los casos no son precisamente fáciles de aplicar a los elementos biológicos. En el caso concreto del hueso, es necesario estudiarlo desde tres puntos de vista completamente diferentes, considerando por una parte su estructura, por otra el material constitutivo, y por último el sistema biológico del que forma parte. (Roesler, 1987: 1025-1034)

El hueso está constituido por un material natural compuesto, formado por una proteína blanda y resistente, el colágeno, y un mineral frágil de hidroxapatita. La superficie exterior de la zona del hueso correspondiente a las articulaciones está recubierta con cartílago, compuesto de fluidos corporales que lubrican y proporcionan una interfase con un bajo coeficiente de fricción que facilita el movimiento relativo entre los huesos de la articulación.

Por otra parte, la morfología del hueso permite conseguir un material rígido y ligero al mismo tiempo. La rigidez la confiere la capa exterior, formada de material compacto, mientras que en el interior adopta una forma esponjosa que le permite minimizar el peso. En huesos largos, la sección y el espesor de la pared exterior varía a lo largo del perfil ajustándose a las solicitaciones a las que estará sometido en cada zona. En la figura 1.1 se han incluido dos cortes, uno longitudinal y otro transversal del fémur derecho, en los que se puede observar claramente el límite de la zona constituida por

material compacto, denominada zona cortical, y la zona interior, formada por una serie de laminillas o trabéculas, que constituyen lo que se denomina zona esponjosa.

Se trata de un sistema complejo, sujeto a un gran número de procesos bioquímicos, biofísicos y biológicos, relacionados entre sí, y, lo que es más importante, íntimamente relacionados con las propiedades mecánicas y geométricas.

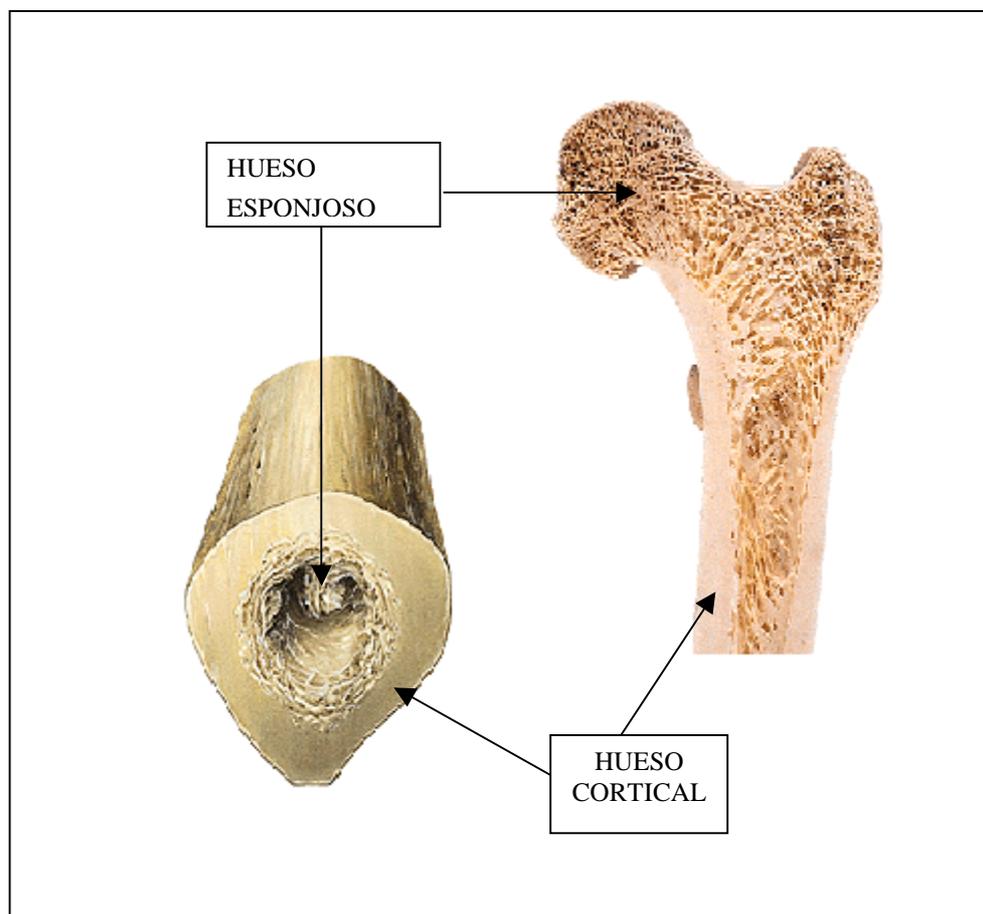


Fig. 1.1. Sección transversal y longitudinal del fémur derecho, donde se puede observar claramente la zona cortical y esponjosa del hueso. Fuente: Sobotta, 1993.

Los huesos vivos no se pueden considerar como cualquier otro material utilizado en ingeniería, por complejo que éste pueda ser. La diferencia fundamental estriba en el hecho de que la estructura microscópica de éstos permanece constante, mientras que la estructura ósea se encuentra en un continuo proceso de crecimiento o resorción, que constituye el mecanismo mediante el cual el hueso adapta su estructura para soportar mejor los esfuerzos a que está sometido. Este proceso de remodelado del hueso tiene lugar tanto interna como externamente. El remodelado interno ayuda a mantener la dirección de las trabéculas constitutivas del hueso esponjoso alineadas con las direcciones principales, mientras que el externo, consistente en la deposición o resorción de la superficie exterior del hueso, permite reconfigurar la sección del mismo para minimizar las tensiones, en función del estado de carga predominante. En los últimos años, con el aumento de potencia que han experimentado los ordenadores personales, ha aumentado el número de trabajos en biomecánica en los que se trata de relacionar la estructura del hueso con el estado de carga a que ha estado sometido. (Brown, 1990: 893-905.), (Cappello, 1998: 289-294), (Carter, 1987, a: 785-794, b: 1095-1109), (Carter, 1989: 231-244), (Cowin, 1996), (Fyhrie, 1990: 1-10.), (Fyhrie, 1995: 135-146), (Hart, 1990: 241-257), (Jacobs, 1995: 449-459), (Misra, 1987: 241-249), (Mullender, 1994: 1389-1394), (Prendergast, 1994: 1067-1076), (Weinans, 1992: 1425-1441), (Whalen, 1988: 825-837). Esto es de especial relevancia en implantes, en los que se requiere un conocimiento profundo de las relaciones entre las propiedades biológicas y mecánicas, debido a las modificaciones que experimenta el hueso en su estructura y propiedades después de la inserción de una prótesis. (Bertini, 1980: 735-755.), (Keaveny, 1995: 911-923), (Levenston, 1993: 595-605), (Rakotomanana, 1996), (van Rietbergen, 1993: 369-382), (Weinans, 1993: 1271-1281).

Para analizar las propiedades mecánicas del hueso se van a estudiar por separado la zona cortical (exterior), y la zona esponjosa (interior). En ambos casos, se deberá tener en cuenta la complejidad del material que se está estudiando, que se traduce fundamentalmente en un comportamiento anisótropo y una estructura no homogénea.

2. Estudio de la anisotropía del hueso

En los últimos años se han desarrollado varios trabajos de investigación, algunos basados en métodos numéricos, y otros utilizando distintas técnicas experimentales, basadas en métodos mecánicos o utilizando las técnicas de ultrasonidos, con el objetivo

de determinar la anisotropía del hueso. (Ashman, 1984: 349 - 361), (Cowin, 1989: 503-515), (Katz, 1987: 1063 -1070), (Meunier, 1989: 1015-1018).

Aunque en general el comportamiento del hueso es viscoelástico, no lineal, para no complicar excesivamente el problema la mayoría de los estudios de biomecánica consideran al hueso como un material elástico, lineal, lo que se aproxima razonablemente a la realidad salvo en caso de cargas de impacto. Teniendo en cuenta esta simplificación, se puede considerar que su comportamiento vendrá determinado por la conocida ley de Hooke:

$$[\sigma] = C [\varepsilon]$$

donde $[\sigma] = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12}]$ es el vector tensión,
 C es la matriz de rigidez, y
 $[\varepsilon] = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{12}]$ es el vector deformación.

De los 36 elementos que tiene la matriz de rigidez, el número de elementos distintos de cero y linealmente independientes dependerá del grado de anisotropía del hueso:

- Si se considera el hueso totalmente anisótropo, tendrá 21 elementos distintos C_{ij} . (La matriz de rigidez es simétrica, $C_{ij} = C_{ji}$, en virtud de que, por la simplificación adoptada, los procesos de carga - deformación son fenómenos conservativos).
- Si la estructura del hueso define algún tipo de simetría elástica, muchos de estos elementos se anulan, y otros son combinación lineal de los ya existentes. En el caso extremo en el que la simetría elástica tuviese lugar en todos los planos, es decir, el hueso fuese un material isótropo, la matriz sería de la forma siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

donde $c_{11} = \frac{E}{1 - \mu^2}$ y $c_{12} = \frac{\mu \cdot E}{1 - \mu^2}$

Por lo tanto, sería suficiente conocer el módulo de Young, E , y el módulo de Poisson, μ , para definir la matriz de rigidez.

Entre las dos situaciones extremas, correspondientes a un material completamente isótropo o anisótropo, existen muchas situaciones intermedias en las que el material sólo presenta simetría elástica en determinadas direcciones, como es el caso de la isotropía transversal o la ortotropía. La matriz de rigidez en ambos casos queda reducida de la forma siguiente:

- Ortotropía.- El material presenta tres planos de simetría elástica, y la matriz de rigidez queda de la forma siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Los C_{ij} se determinan mediante los módulos de Young E_x, E_y, E_z , los coeficientes de Poisson $\mu_{xy}, \mu_{xz}, \mu_{yz}$, y los módulos de elasticidad transversal G_{xy}, G_{xz} , y G_{yz} . Por lo tanto, para definir este modelo se necesita determinar nueve constantes independientes.

- Isotropía transversal.- El material presenta un eje de simetría elástica y la matriz de rigidez queda de la forma siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Los C_{ij} se determinan mediante los módulos de Young $E_x = E_y$ (transversal) y E_z (longitudinal), los coeficientes de Poisson μ_{xy} y $\mu_{xz} = \mu_{yz}$, y el módulo de elasticidad transversal $G_{xz} = G_{yz}$. En este modelo se necesitan solamente cinco constantes independientes del material.

Para poder estudiar el comportamiento del hueso es necesario distinguir la zona cortical de la esponjosa, ya que su estructura es completamente distinta, y la simetría elástica de un material viene determinada en gran medida por la simetría de su estructura.

En principio el hueso de la zona cortical no se comporta como un material isótropo, es decir, sus propiedades mecánicas van a depender de la dirección considerada. Por ejemplo, en la zona central de un fémur humano, en la zona compacta, la rigidez es alrededor de un 50% superior en la dirección axial que en la transversal. Pero puede presentar distintos tipos de simetría elástica, dependiendo de su estructura, aunque lo más normal es que presente isotropía transversal, o que se comporte como un material ortotrópico. (Katz, 1987: 1063 -1070).

En el eje de los huesos largos, como el fémur, la zona cortical, al tener una dirección longitudinal característica definida por el eje del hueso, está bien representada por un modelo con isotropía transversal, donde el plano transversal es perpendicular al eje del hueso, siendo en este plano donde se considera que el comportamiento es isótropo; es decir, los módulos radiales y circunferenciales son iguales.

La zona esponjosa del hueso es mucho más compleja que la cortical, debido fundamentalmente a la heterogeneidad que presenta. Por ejemplo, la zona esponjosa encontrada en los extremos de huesos largos puede ser fuertemente anisótropa, con un comportamiento similar al de la zona cortical, debido a la orientación preferente que adoptan las trabéculas individuales que componen la zona esponjosa del hueso. Sin embargo, existen otras zonas en las que la dirección de las trabéculas es aleatoria, y el hueso esponjoso es prácticamente isótropo. En general, la isotropía de la zona esponjosa del hueso dependerá de los esfuerzos que actúen en cada zona, ya que éstos son los que determinan la simetría geométrica de las trabéculas. Si las condiciones de carga son asimétricas, existirá asimetría geométrica, y por tanto, el material se comportará como isótropo, al no existir ninguna dirección privilegiada. Sin embargo, cuando los esfuerzos sean axiales, existirá simetría cilíndrica en la estructura, y el material presentará isotropía transversal.

Esta variabilidad en el comportamiento del hueso esponjoso ha dado lugar a distintos criterios a la hora de seleccionar el modelo que represente el comportamiento de la zona esponjosa. Muchos estudios simplifican el problema considerando esta zona del hueso como isótropa, en algunas ocasiones se considera como un material ortotrópico, para describir mejor el comportamiento del material en función de la dirección, y casi nunca se llega a considerar como completamente anisótropo. El hecho de considerar un material como isótropo, cuando realmente se trata de un material ortotrópico, puede dar lugar a errores que en algunos casos pueden ser significativos (Cowin, 1990: 349-352).

3. Propiedades mecánicas del hueso cortical

Para la determinación de las propiedades mecánicas del hueso se puede aplicar directamente el ensayo de tracción, tomando probetas de distintas zonas del hueso, para determinar la ley tensión-deformación, pero la aplicación del método resulta complicada por la dificultad de conseguir probetas de tamaño adecuado. Para evitar este inconveniente, se han desarrollado distintos dispositivos mecánicos específicos que permiten determinar las propiedades del hueso con una mayor precisión y repetibilidad

que los métodos convencionales. (Bramer, 1998: 741-745), (Katsamanis, 1990: 1173-1184), (Raftopoulos, 1992: 60-66), (Rho, 1993: 111-119).

Algunos autores relacionan el módulo de elasticidad directamente con la microdureza Vickers, más fácil de medir. Es un método sencillo, pero los resultados obtenidos no son fiables.

Las técnicas basadas en ultrasonidos suponen una herramienta muy potente para determinar las propiedades elásticas de sólidos anisótropos, especialmente cuando el tamaño de las muestras que se desean ensayar es demasiado pequeño para ensayos mecánicos, como es el caso del hueso. Pero sigue siendo un método laborioso y muy caro. (Rho, 1993: 111-119), (Yoon, 1976 a: 407-412, b: 459-464).

Últimamente, con el desarrollo de los métodos numéricos, algunos autores incluso han tratado de simular el comportamiento mecánico del hueso a nivel macroscópico a partir de las características mecánicas de los elementos que constituyen el hueso a nivel microscópico, definiendo modelos que incluyen estos elementos. (Crolet, 1993: 677-687), (Lakes, 1995).

De los métodos indicados, para estudiar la zona cortical la mayoría de los autores utilizan los valores determinados por el método de ultrasonidos, ya que es el único capaz de cuantificar la anisotropía del mismo. En las siguientes tablas se incluyen algunas de las propiedades del hueso determinadas experimentalmente mediante ultrasonidos en el hueso cortical por distintos autores (Ashman, 1984: 349 - 361), (Knets, 1978: 434 - 440), (Meunier, 1989: 1015-1018), (Van Burskirk, 1981: 131-143) y (Yoon, 1976, b: 459-464).

Se observa cómo las propiedades mecánicas del hueso varían considerablemente entre un hueso fresco y otro seco. También existen otras características del hueso, como la porosidad, el contenido mineral, y la densidad, que influyen significativamente en sus características mecánicas. (Currey, 1988: 131-139), (Schaffler, 1988: 13-16). En estos estudios se demuestra cómo una pequeña alteración de la densidad del tejido óseo produce una modificación de las propiedades mecánicas que es mucho más acusada en el hueso cortical que en el esponjoso.

Coefficientes de la matriz de rigidez (Gpa). Hueso cortical.			
	Fémur seco (Yoon, 1976 b)	Tibia fresca (Knets, 1978)	Fémur fresco (Van Burskirk, 1981)
c_{11}	23,4	13	20,85
c_{33}	32,5	22,5	30
c_{44}	8,71	4,24	6,21
c_{66}	7,17	2,41	4,74
c_{12}	9,06	7,95	10,91
c_{13}	9,11	6,51	11,49

Tabla 3.1. Coeficientes de la matriz de rigidez del hueso determinado por distintos autores aplicando el método de ultrasonidos.

Grado de anisotropía (con huesos frescos). Hueso cortical.			
	Fémur (Ashman, 1984)	Fémur (Meunier, 1989)	Tibia (Meunier, 1989)
c_{11}/c_{33}	$0,7 \pm 0,04$	$0,67 \pm 0,05$	$0,63 \pm 0,05$
c_{12}/c_{33}	$0,36 \pm 0,04$	$0,36 \pm 0,04$	$0,36 \pm 0,04$
c_{13}/c_{33}	$0,38 \pm 0,05$	$0,37 \pm 0,04$	$0,37 \pm 0,04$
c_{44}/c_{33}	$0,21 \pm 0,02$	$0,20 \pm 0,02$	$0,19 \pm 0,01$
c_{66}/c_{33}	$0,16 \pm 0,01$	$0,15 \pm 0,02$	$0,13 \pm 0,02$

Tabla 3.2. Cocientes de distintos coeficientes de la matriz de rigidez del hueso determinados experimentalmente por distintos autores, para cuantificar el grado de anisotropía.

	Fémur fresco (Ashman, 1984)	Fémur fresco (Meunier, 1989)	Fémur seco (Yoon ,1976 b)
$E_x = E_y$ (GPa) (transversal)	13,48	12,41	18,8
E_z (GPa) (longitudinal)	20,6	20,35	27,4
μ_{xy}	0,37	0,41	0,31
μ_{xz}	0,22	0,20	0,193
μ_{zx}	0,36	0,35	0,28
G_{xy} (GPa) (transversal)	4,52	4,22	7,17
G_{xz} (GPa) (longitudinal)	6,23	5,8	8,71

Tabla 3.3. Módulos de elasticidad E , coeficiente de Poisson, m , y módulo de rigidez G , del hueso cortical, determinado experimentalmente por distintos autores.

4. Propiedades mecánicas del hueso esponjoso

Se ha demostrado, tanto experimentalmente (Carter, 1977: 954-962), como numéricamente (Gibson, 1985: 317-328), que el módulo de elasticidad del hueso esponjoso depende de la densidad estructural del mismo. Pero en determinadas zonas, entre las que se encuentra la epífisis femoral, el hueso esponjoso tiene una estructura anisótropa y, por lo tanto, su comportamiento no se puede predecir simplemente mediante un escalar la densidad. En estos casos, las constantes elásticas del hueso esponjoso se determinan a partir de la densidad estructural y de algún parámetro vectorial que permita cuantificar la anisotropía en cada zona.

Con el desarrollo de técnicas como la tomografía axial computerizada (TAC), en aquellas zonas en las que el hueso esponjoso se pueda considerar con un

comportamiento isotrópico, se pueden determinar sus propiedades mecánicas directamente a partir de la densidad obtenida en imágenes radiográficas. Aunque se trata de una simplificación de la situación real, ya que el módulo de elasticidad del hueso no depende únicamente de la densidad, es un método muy utilizado debido a su simplicidad y economía. Además, se trata de un método no destructivo y continuo, lo que resulta muy adecuado para introducir las propiedades del material en modelos numéricos.

En aquellos casos en los que sea necesario tener en cuenta también la anisotropía del hueso esponjoso, ésta se puede cuantificar mediante un tensor que se define midiendo la proporción de huecos frente a la de hueso interceptados por una serie de líneas paralelas y perpendiculares entre sí, en una zona determinada del hueso esponjoso. Cowin (1985: 137-147) desarrolló una serie de ecuaciones que relacionaban explícitamente este tensor con la densidad relativa y las constantes elásticas del material. Posteriormente, este tensor ha sido utilizado en numerosos estudios para analizar el comportamiento mecánico del hueso esponjoso. (Cowin, 1989: 503-515) (Turner, 1990: 549-561). Asimismo, Goulet (1994: 375-389) analizó la relación entre las propiedades mecánicas de la zona esponjosa y la estructura del mismo, considerando como parámetros definitorios de dicha estructura su anisotropía, definida por el tensor indicado anteriormente, y la fracción de volumen, definida como la relación entre el volumen del tejido óseo y el volumen total.

Análogamente al hueso cortical, pero con mayor complejidad, con el desarrollo experimentado en los últimos años por los métodos numéricos, algunos autores han tratado de definir el comportamiento del hueso esponjoso a partir de las características mecánicas de las trabéculas, definiendo modelos a nivel microscópico que representan la arquitectura de las estructuras trabeculares, y que permiten reproducir el comportamiento de la estructura básica del hueso. (Fazzalari, 1989: 901-910), (Gibson, 1985: 317-328), (van Rietbergen, 1995: 69-81), (van Rietbergen, 1999: 165-173).

En la tabla 4.1 se han incluido la relación entre las propiedades mecánicas de la zona esponjosa y cortical, en función de la densidad relativa de la primera, teniendo en cuenta la estructura del hueso. Estas relaciones son las determinadas numéricamente por Gibson, 1985: 317-328, aplicando al hueso esponjoso el mismo mecanismo de deformación que el de determinadas espumas poliméricas. Se han incluido estos resultados por tener en cuenta no sólo la densidad relativa, sino también el tipo de estructura, y por coincidir razonablemente con otros datos experimentales encontrados

en la literatura. (Goulet, 1994: 375-389), (Keaveny, 1993: 991-1000), (Rice, 1988: 155-168), (Turner, 1990: 549-561).

Propiedad	Densidad relativa (ρ_{relativa}) $\rho_{\text{esponjoso}} / \rho_{\text{trabécula}}$	Relación de proporcionalidad
MATERIAL ISÓTROPO		
$E_{\text{esponjoso}} / E_{\text{trabécula}}$	< 0.2	$(\rho_{\text{relativa}})^2$
	> 0.2	$(\rho_{\text{relativa}})^3$
$\sigma_{\text{esponjoso}} / \sigma_{\text{trabécula}}$	Todas	$(\rho_{\text{relativa}})^2$
MATERIAL CON ISOTROPÍA TRANSVERSAL		
$(E_{\text{esponjoso}} / E_{\text{trabécula}})_{\text{long}}$	Todas	ρ_{relativa}
$(E_{\text{esponjoso}} / E_{\text{trabécula}})_{\text{trans}}$	< 0.2	$(\rho_{\text{relativa}})^2$
	> 0.2	$(\rho_{\text{relativa}})^3$
$(\sigma_{\text{esponjoso}} / \sigma_{\text{trabécula}})_{\text{long}}$	Todas	ρ_{relativa}
$(\sigma_{\text{esponjoso}} / \sigma_{\text{trabécula}})_{\text{trans}}$	-	$(\rho_{\text{relativa}})^2$, $(\rho_{\text{relativa}})^3$, $(\rho_{\text{relativa}})^{3/2}$, 0

Tabla 4.1. Relación entre las propiedades mecánicas del hueso esponjoso y la correspondiente propiedad del tejido óseo de la trabécula, a partir de la densidad relativa, definida como la relación entre la densidad del hueso esponjoso y la de la trabécula. Fuente: Gibson, 1985: 317-328.

Para determinar las propiedades mecánicas de la trabécula, existen distintas hipótesis. En un principio se consideraba que el tejido óseo de la trabécula era el mismo que el del hueso cortical, de modo que las propiedades mecánicas de las trabéculas de la zona esponjosa no difieren mucho de las del hueso de la zona cortical. Así, para calcular las propiedades indicadas en la tabla 4.1 es suficiente con sustituir en la densidad de la trabécula la correspondiente al hueso cortical, de 1800 kg/m³ (Carter, 1977: 954-962). Esta hipótesis es la que se ha venido utilizando desde Wolff (1892). Siguiendo en esta línea, Carter (1976: 1174-1175) sigue considerando que el hueso cortical y el esponjoso se pueden considerar como un único material, con diferencias en las propiedades mecánicas debidas principalmente a la variación de su densidad estructural.

Pero últimamente, desde 1988, se ha discutido mucho esta hipótesis (Ashman, 1988: 177-181), (Choi, 1990: 1103-1113), (Keller, 1990: 592-603), (Rice, 1988: 155-168). En los ensayos realizados por Rho (1993: 111-119), la media del módulo de elasticidad determinado para la trabécula fue de 14,8 Gpa por ultrasonidos y 10,4 Gpa en el ensayo de tracción, frente a los 20,7 y 18,6 Gpa obtenidos respectivamente según los mismos ensayos para una serie de muestras tomadas de la zona cortical. En ambos ensayos se observa cómo el módulo de elasticidad obtenido en la trabécula es significativamente menor que el obtenido en la muestra de hueso cortical. Analizando estos resultados se demuestra que desde el punto de vista mecánico, el hueso de la zona cortical y esponjosa no se pueden considerar el mismo material.

Para confirmar esta hipótesis, en la tabla 4.2 se han recogido los valores del módulo de elasticidad del material de la trabécula, según distintos autores. Se observa cómo, efectivamente, estos valores son sensiblemente inferiores a los obtenidos para el hueso cortical, indicados en la tabla 3.3. También se puede apreciar una notable disparidad entre los resultados obtenidos mediante ultrasonidos y los determinados mediante ensayos de tracción, posiblemente debida a que este último es cuasiestático, en tanto que en el de ultrasonidos las velocidades de deformación son muy rápidas, lo que, en materiales de comportamiento viscoelástico da lugar a una rigidez mayor.

En la tabla 4.3 se han incluido los valores del módulo de elasticidad del hueso esponjoso determinado experimentalmente por Ashman, 1988: 177-181, utilizando la técnica de ultrasonidos, tomando muestras de tres huesos distintos.

Existe otro factor a tener en cuenta en el hueso esponjoso, sobre todo cuando se trata de estudiar zonas próximas a interfaces con otros elementos, como es el caso de la zona en contacto con la prótesis, o zonas en las que el gradiente de tensiones es elevado. En ambos casos, el modelo de huesos esponjoso no se puede considerar como un material continuo, ya que las propiedades mecánicas cambian considerablemente de una trabécula a otra, y por tanto no se puede promediar aplicando un modelo continuo, ya que los resultados obtenidos no son aceptables. En estos casos es necesario aplicar un modelo estadístico en la zona de la interfase (Harrigan, 1988: 269-275.).

Autor	Tipo de hueso	Método utilizado	Módulo de elasticidad de la trabécula
Wolff, 1892	húmedo	Hipótesis	17 - 20 Gpa
Pugh, 1973	Fémur distal	Elementos finitos	Menor que el cortical
Runkle , 1975	Fémur distal seco	Deformación	8,69 Gpa
Townsend, 1975	Tibia, proximal	Deformación no elástica	11,38 Gpa (fresco) 14,13 Gpa (seco)
Williams, 1982	Tibia, proximal	Elem. finitos 2-D	1,3 Gpa
Ku, 1987	Tibia congelada fresca	Flexión con 3 puntos	3,17 Gpa
Mente, 1987	Fémur seco Tibia fresca	Empotramiento a flexión con M.E.F	5,3 Gpa
Ashman, 1988	Fémur	Ultrasonidos	12.7 Gpa
Choi, 1989	Tibia	Flexión con 3 puntos	4,59 Gpa
Kuhn,1989	Cresta ilíaca	Flexión con 3 puntos	3,81 Gpa
Mente, 1989	Fémur seco Tibia fresca	Empotramiento a flexión con M.E.F.	7,8 Gpa
Jensen, 1990	Vértebra (L3)	Análisis estructural con modelo 3-D	3,8 Gpa
Choi, 1991	Tibia	Flexión con 4 puntos	5,35 Gpa
Rho,1993	Tibia	Ultrasonidos Ensayo tracción	14,8 Gpa 10,4 Gpa

Tabla 4.2. Módulos de elasticidad de la trabécula, determinado por distintos autores, recogidos en orden cronológico. A pesar de la dispersión existente entre los distintos autores, en general tiene un valor inferior a los determinados para el hueso de la zona cortical.

	Módulo de elasticidad del hueso esponjoso (Gpa)
Fémur 1 (n = 11)	0,959 (0,388)
Fémur 2 (n = 21)	1,78 (0,857)
Fémur 3 (n = 21)	2,17 (1,07)

Tabla 4.3. Valores medios de los módulos de elasticidad del hueso esponjoso. Entre paréntesis se ha incluido la desviación típica. Fuente: Ashman, 1988: 177-181.

5. Determinación del límite elástico en el material óseo.

El límite elástico del hueso sometido exclusivamente a carga axial ha sido determinado experimentalmente por distintos autores. En general, la resistencia a la tracción del hueso cortical se encuentra comprendida entre los 80 y 150 Mpa, y la resistencia a la compresión entre los 90 y 280 Mpa. (Reilly,1974: 1001-1022). Además del comportamiento a tracción y compresión, también se han realizado numerosos ensayos experimentales para estudiar el comportamiento mecánico del hueso cortical sometido a flexión pura. (Martens, 1986: 443-454).

Pero el hueso en general está sometido a cargas combinadas, incluyendo tracción, compresión, flexión o torsión. En estos casos el criterio de Von Mises (1913: 582-592) no es aplicable para determinar el límite elástico del hueso, por tratarse de un material anisótropo y con comportamiento distinto a tracción y a compresión. El criterio de Von Mises viene dado por la siguiente ecuación:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2K^2$$

donde σ_1 , σ_2 y σ_3 son las tensiones principales, y K es el límite elástico a tracción y a compresión.

Por lo tanto, sólo será aplicable a materiales isótropos con un comportamiento simétrico a tracción y compresión.

Si se considera un hueso con isotropía transversal, se pueden aplicar los siguientes criterios, considerando el sistema de referencia indicado en la figura 5.1.

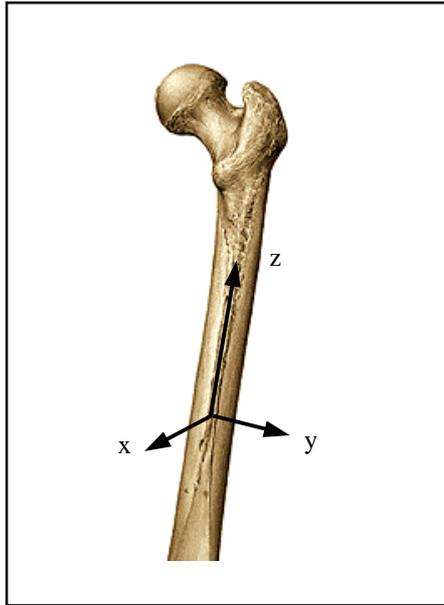


Fig. 5.1. Sistema de referencia utilizado para la definición de la anisotropía del fémur. Fuente: Sobotta, 1993.

- Criterio de Hill (1948).
En un material anisótropo,

$$F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1$$

donde F, G, H, L, M, y N, son constantes que se determinan empíricamente.

Si se considera que el material presenta isotropía transversal en el plano xy, y que sólo existen cargas y pares según el eje principal del material z, la ecuación se simplifica de la forma siguiente:

$$2G\sigma_z^2 + 4L\tau_{yz}^2 = 1$$

- Criterio de Tsai y Wu (1971) .

En un material anisótropo,

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \cdot \sigma_j = 1 \quad i, j = 1 \dots 6$$

donde F_i son constantes que se determinan empíricamente.

Si se considera que existe isotropía transversal en el plano xy, se simplifica de la forma siguiente:

$$F_z \cdot \sigma_z + F_{zz} \sigma_z^2 + F_{ss} \cdot \tau_{xz}^2 = 1$$

- Criterio de Raghava y Robert (1973).

No tiene en cuenta la anisotropía, pero distingue entre tracción y compresión.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2(C-T)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 2CT$$

donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las tensiones principales, y C y T son los valores absolutos de la tensión de fluencia a compresión y tracción, respectivamente.

Si se considera un estado de tensiones plano, esta relación se reduce a la siguiente:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + (C-T)(\sigma_1 + \sigma_2) = CT$$

Para analizar la viabilidad de los criterios indicados, Cezayirlioglu (1985: 61-69) ha realizado ensayos en huesos de tibia y fémur de una población comprendida entre los 40 y 50 años para la tibia, y entre los 60 y 70 años en el fémur. En los resultados obtenidos se comprueba cómo el método de Von Mises y el de Raghava, se alejan del comportamiento real del hueso, debido a su anisotropía y falta de simetría en

tracción/compresión. Los criterios que mejor representan su comportamiento son los de Hill y Tsai-Wu, en los que los coeficientes se determinan empíricamente. A partir de los resultados obtenidos en los ensayos indicados, se han determinado los coeficientes de los distintos criterios para su aplicación al hueso, incluidos en la tabla 5.1. Estos coeficientes permiten determinar el límite elástico del hueso cortical, teniendo en cuenta su anisotropía y la diferencia de su comportamiento a tracción y compresión.

	Criterio de Tsai-Wu			Criterio de Hill			Criterio de Raghava		Criterio de Von Mises
	F_z $\times 10^{-3}$ m^2 / N	F_{zz} $\times 10^{-5}$ m^4 / N^2	F_{ss} $\times 10^{-4}$ m^4 / N^2	G(trac.) $\times 10^{-5}$ m^4 / N^2	G(comp) $\times 10^{-5}$ m^4 / N^2	L $\times 10^{-5}$ m^4 / N^2	T Mpa	C Mpa	K Mpa
fémur	3,1	4,76	3,43	3,72	1,53	8,57	116	181	116
tibia	2,26	4,34	3,56	3,05	1,54	8,90	128	180	128

Tabla 5.1. Coeficientes de los distintos criterios de fallo por fluencia determinados experimentalmente en la tibia y fémur. Fuente: Cezayirlioglu (1985).

6. Conclusiones

El presente estudio pone de manifiesto las dificultades existentes para determinar las características mecánicas del hueso, así como la dispersión existente entre estos valores, ya sea debido al diferente comportamiento mecánico que presentan huesos distintos, o por diferencias en el planteamiento de las hipótesis simplificativas aplicadas en los distintos ensayos por distintos autores.

En el caso del hueso cortical no existe la dispersión que se puede encontrar en el hueso esponjoso al comparar las características mecánicas determinadas por distintos autores. Además, se da la circunstancia de que en aquellos huesos en los que el papel de la zona cortical es predominante presentan isotropía transversal, por lo que es suficiente con determinar el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson en la dirección longitudinal y transversal. E_x y E_y se encuentran en valores próximos a los 13 Gpa, mientras que E_z está alrededor de los 20 Gpa. Por otra parte, los valores de m_{xy} y m_{xz}

oscilan alrededor de 0.4, y 0.2, respectivamente. En los huesos que no presentan isotropía transversal, la zona cortical se puede considerar isótropa, con valores de E alrededor de 20 Gpa, y ν de 0.3, aproximadamente.

Si se analiza el comportamiento mecánico del hueso esponjoso, se observa que en este caso sí que existen diferencias considerables entre los valores determinados por distintos autores. Como ya se indicó en el apartado 4, existen diferencias notables incluso entre los datos determinados por un mismo autor aplicando el mismo ensayo a muestras diferentes. Por ejemplo, Ashman (1988) determinó para tres grupos semejantes de muestras diferentes de hueso esponjoso un módulo de elasticidad de 0.959, 1.78, y 2.17 Gpa., respectivamente, como se indica en la tabla 4.3. Esto indica que entre huesos de distintos individuos el módulo de elasticidad del hueso esponjoso puede duplicarse. Pero, es más, si se tiene en cuenta su dependencia con la densidad relativa, indicada también en el apartado 2.2, se ve cómo, dentro de un mismo hueso, las propiedades mecánicas varían sustancialmente entre las distintas zonas del hueso esponjoso.

Este problema no es tal en zonas del hueso en las que la mayor parte de la carga la soporta el hueso cortical, como la zona distal del fémur, donde se prevé que la influencia del módulo de elasticidad del hueso esponjoso va a ser prácticamente nula. Sin embargo, zonas como la proximal, donde prácticamente no existe hueso cortical, y es el hueso esponjoso el que transmite la carga, sí que influirá la resistencia de éste. Por lo tanto, en estas zonas, sí que será necesario determinar las características mecánicas del hueso esponjoso concreto que se quiere estudiar, mediante las técnicas indicadas en el apartado 4.

7 Bibliografía

- Ashman R.B., Cowin S.C., Van Buskirk W.C., Rice J.C. (1984). "A continuous wave technique for the measurement of the elastic properties of cortical bone". *Journal of Biomechanics*; 17: 349 - 361.
- Ashman R.B., Rho J.Y. (1988). "Elastic modulus of trabecular bone material". *Journal of Biomechanics*; 21: 177-181.
- Bertini G., Calderale P.M., Dettoni A., Gallinaro P., Lorenzi G.I. (1980). "Cortical bone changes after hip replacement: radiographic study". *Acta Orthopaedica Belgica*; 46(6): 735-755.

- Bramer J.A.M., Barentsen R.H., vd Elst M, de Lange E.S.M., Patka P., Haarman H.J. Th. M. (1998). "Representative assessment of long bone shaft biomechanical properties: an optimized testing method". *Journal of Biomechanics*; 31: 741-745.
- Brown Th. D., Pedersen D. R., Gray M. L., Brand R. A., Rubin C. T. (1990). "Toward an identification of mechanical parameters initiating periosteal remodeling: a combined experimental and analytic approach". *Journal of Biomechanics*; 23(9): 893-905.
- Cappello A., Viceconti M., Nanni F., Catania G. (1998). "Global asymptotic stability of bone remodeling theories: a new approach based on non-linear dynamical systems analysis". *Journal of Biomechanics*; 31: 289-294.
- Carter, D.R., Hayes W.C. (1976). "Bone compressive strength: the influence of density and strain rate". *Science*; 194: 1174-1175.
- Carter, D.R., Hayes W.C. (1977). "The compressive behavior of bone as a two-phase porous material". *The Journal of Bone and Joint Surgery*; 59-A: 954-962.
- Carter, D.R., Fyhrie D.P., Whalen R.T. (1987, a). "Trabecular bone density and loading history: Regulation of connective tissue biology by mechanical energy". *Journal of Biomechanics*; 20 (8): 785-794.
- Carter, D.R. (1987, b). "Mechanical Loading history and skeletal biology". *Journal of Biomechanics*; 20 (11/12): 1095-1109.
- Carter, D.R., Orr T.E., Fyhrie D.P. (1989). "Relationships between loading history and femoral cancellous bone architecture". *Journal of Biomechanics*; 22 (3): 231-244.
- Cezayirlioglu H., Bahniuk E., Davy D.T., Heiple K.G.(1985). "Anisotropic yield behavior of bone under combined axial force and torque". *Journal of Biomechanics*; 18(1): 61-69.
- Choi K., Kuhn J.L., Ciarelli M.J., Goldstein S.A. (1990). "The elastic moduli of human subchondral, trabecular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus". *Journal of Biomechanics*; 23(11): 1103-1113.
- Cowin S.C. (1985). "The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor". *Mechanics Mater.*; 4: 137-147.
- Cowin S.C., Mehrabadi M.M. (1989). "Identification of the elastic symmetry of bone and other materials". *Journal of Biomechanics*; 22(6,7): 503-515.
- Cowin S.C., Hart R.T. (1990). "Errors in the orientation of the principal stress axes if bone tissue is modeled as isotropic". *Journal of Biomechanics*; 23(4): 349-352.
- Cowin S.C. (1996). "Bone stress adaptation models". <http://www-me.engr.cuny.cuny.edu/CBE/boards/cowin2.html>.

-
- Crolet J.M., Aoubiza B., Meunier A. (1983). "Compact bone: Numerical simulation of mechanical characteristics". *Journal of Biomechanics*; 26 (6): 677-687.
- Currey J.D. (1988). "The effect of porosity and mineral content on the Young's modulus of elasticity of compact bone". *Journal of Biomechanics*; 21 (2): 131-139.
- Fazzalari N.L., Crisp D.J., Vernon-Roberts B. (1989). "Mathematical modelling of trabecular bone structure: The evaluation of analytical and quantified surface to volume relationships in the femoral head and iliac crest". *Journal of Biomechanics*; 22(8/9): 901-910.
- Fyhrie D.P., Carter D.R. (1990). "Femoral head apparent density distribution predicted from bone stresses". *Journal of Biomechanics*; 23(1): 1-10.
- Fyhrie D.P., Schaffler M.B. (1995). "The adaptation of bone apparent density to applied load". *Journal of Biomechanics*; 28 (2): 135-146.
- Gibson L.J. (1985). "The mechanical behaviour of cancellous bone". *Journal of Biomechanics*; 18 (5): 317-328.
- Goulet R.W., Goldstein S.A., Ciarelli M.J., Kuhn J.L., Brown M. B., Feldkamp L.A. (1994). "The relationship between the structural and orthogonal compressive properties of trabecular bone". *Journal of Biomechanics*; 27(4): 375-389.
- Hansen T.M., Koeneman J.B. (1987). "The use of structural partitioning within Ansys to solve nonlinearities with human hip replacement models". *Ansys 1987 Conference Proceedings*; 6.1 - 6.17.
- Hart R.T. (1990). "A theoretical study of the influence of bone maturation rate on surface remodeling predictions: Idealized models". *Journal of Biomechanics*; 23(3): 241-257.
- Harrigan T.P., Jasty M., Mann R.W., Harris W.H. (1988). "Limitations of the continuum assumption in cancellous bone". *Journal of Biomechanics*; 21(4): 269-275.
- Hill R. (1948). "A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals". *Proc. R. Soc.*; A193: 281-297.
- Jacobs Ch. R., Levenston M.E., Beaupré G.S., Simo J.C., Carter D. R. (1995). "Numerical instabilities in bone remodeling simulations: The advantages of a node-based finite element approach". *Journal of Biomechanics*; 28(4): 449-459.
- Katsamanis F., Raftopoulos D.D. (1990). "Determination of mechanical properties of human femoral cortical bone by Hopkinson bar stress technique". *Journal of Biomechanics*; 23 (11): 1173-1184.
- Katz J.L., Meunier A. (1987). "The elastic anisotropy of bone". *Journal of Biomechanics*; 20 (11/12): 1063 -1070.

- Keaveny T.M., Borchers R.E., Gibson L.J., Hayes W.C. (1993). "Trabecular bone modulus and strength can depend on specimen geometry". *Journal of Biomechanics*; 26(8): 991-1000.
- Keaveny T.M.(1995). "Mechanical consequences of bone ingrowth in a hip prosthesis inserted without cement". *The Journal of Bone and Joint Surgery*.; 77-A(6): 911-923.
- Keller T.S., Mao Z., Spengler D.M. (1990). "Young's modulus, bending strength, and tissue physical properties of human compact bone". *J. Orthop. Res.*; 8: 592-603.
- Knets, I.V., (1978). "Mechanics of Biological Tissues. A Review". *Polymer Mech.* (trans. Mekhanika Polimerov); 13: 434 - 440.
- Lakes R.S. (1995). "On the torsional properties of single osteons". <http://silver.neep.wisc.edu/~lakes/osteons.html>.
- Levenston M.E., Beaupré G.S., Schurman D.J., Carter D.R. (1993). "Computer simulations of Stress-related bone remodeling around noncemented acetabular components". *The Journal of Arthroplasty*; 8(6): 595-605.
- Martens M., van Audekercke R., de Meester P., Mulier J.C. (1986). "Mechanical behaviour of femoral bones in bending loading". *Journal of Biomechanics*; 19(6): 443-454.
- Meunier a., Riot O., Christel P., Katz J.L., Sedel L. (1989). "Inhomogeneities in anisotropic elastic constants of cortical bone". *Ultrasonics Symposium*. 1015-1018.
- Misra J.C., Samanta S. (1987). "Effect of material damping on bone remodelling". *Journal of Biomechanics*; 20: 241-249.
- Mullender M.G., Huiskes R., Weinans H. (1994). "A physiological approach to the simulation of bone remodeling as a self-organizational control process". *Journal of Biomechanics*; 27 (11): 1389-1394.
- Prendergast P.J., Taylor D. (1994). "Prediction of bone adaptation using damage accumulation". *Journal of Biomechanics*; 27(8): 1067-1076.
- Raftopoulos D., Katsamanis E., Saul F., Liu W., Saddemi S. (1993). "An intermediate loading rate technique for the determination of mechanical properties of human femoral cortical bone". *J. Biomed. Eng.*; 15: 60-66.
- Rakotomanana L.R., Terrier A., Leyvraz P.F. (1996). "Anisotropic bone adaptation models: application to orthopaedic implants". *Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering*. Gordon & Breach.
- Reilly D.T., Burstein A.H. (1974). "The mechanical properties of cortical bone". *The Journal of Bone and Joint Surgery*; 56-A, 1001-1022.

- Rho J.Y., Ashman R.B., Turner Ch.H. (1993). "Young's modulus of trabecular and cortical bone material: ultrasonic and microtensile measurements". *Journal of Biomechanics*; 26 (2): 111-119.
- Rice J.C., Cowin S.C., Bowman J.A. (1988). "On the dependence of the elasticity and strength of cancellous bone on apparent density". *Journal of Biomechanics*; 21: 155-168.
- Roesler, H. (1987). "The history of some fundamental concepts in bone biomechanics". *Journal of Biomechanics*; 20: 1025-1034.
- Schaffler M.B., Burr D.B. (1988). "Stiffness of compact bone: Effects of porosity and density". *Journal of Biomechanics*; 21(1): 13-16.
- Sobotta J., Putz R., Pabst, R. (1993). "Atlas der Anatomie des Menschen". Auflage. München. Urban & Schwarzenberg. 20 edición.
- Turner Ch.H., Cowin S.C., Rho J.Y., Ashman R.B., Rice J.C. (1990). "The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone". *Journal of Biomechanics*; 23(6): 549-561.
- Van Buskirk W.C., Ashman, R.B. (1981). "The elastic moduli of bone". *Mechanical Properties of Bone*. (Editado por Cowin, S.C.). American Society of Mechanical Engineers, Colorado. 131-143.
- Van Rietbergen B., Huiskes R., Weinans H., Sumner D.R., Turner T.M., Galante J.O. (1993). "The mechanism of bone remodeling and resorption around press-fitted stems". *Journal of Biomechanics*; 26(4/5): 369-382.
- Van Rietbergen B., Weinans H., Huiskes R., Odgaard A. (1995). "A new method to determine trabecular bone elastic properties and loading using micromechanical finite – element models". *Journal of Biomechanics*; 28(1): 69-81.
- Van Rietbergen B., Müller R., Ulrich D., Rügsegger P., Huiskes R. (1999). "Tissue stresses and strain in trabeculae of canine proximal femur can be quantified from computer reconstructions". *Journal of Biomechanics*; 32: 165-173.
- Von Mises R. (1913). "Mechanik der festen Körper in plastisch deformablem Zustand". *Goettinger Nachr, Mater. Phys.*; K1.: 582-592.
- Weinans H., Huiskes R., Grootenboer H.J. (1992). "The behavior of adaptive bone-remodeling simulation models". *Journal of Biomechanics*; 25(12): 1425-1441.
- Weinans H., Huiskes R., Grootenboer H.J. (1993). "Quantitative analysis of bone reactions to relative motions at implant-bone interfaces". *Journal of Biomechanics*; 26(11): 1271-1281.
- Whalen R.T., Carter D.R., Steele C.R. (1988). "Influence of physical activity on the regulation of bone density". *Journal of Biomechanics*; 21(10): 825-837.

- Wolff, J. (1892). “Das Gesetz der Transformation der Knochen”. Hirschwald. Berlin
- Yoon, H.S., Katz, J.L.(1976a). “Ultrasonic wave propagation in human cortical bone: I. Theoretical considerations for hexagonal symmetry”. *Journal of Biomechanics*; 9: 407-412.
- Yoon, H.S., Katz, J.L.(1976b). “Ultrasonic wave propagation in human cortical bone: II. Measurements of elastic properties and microhardness”. *Journal of Biomechanics*; 9: 459-464. Aguilar Peris, J. (1989): *Curso de Termodinámica*. Alhambra Longman. pp. 166.
- Biel Gayé, J. (1998): *Formalismo y métodos de la Termodinámica*. Reverté. pp. 60.
- Cengel, Y.A. (1995): *Termodinámica*. Mc Graw Hill. pp. 296.
- Jones, J.B.; Dugan, R.E. (1997): *Ingeniería Termodinámica*. Prentice Hall. pp. 328.
- Rusell, L.D.K ; Adebisi, G.A. (1997): *Termodinámica clásica*. Addison Wesley Iberoamericana. pp. 279.
- Sherwin, K. (1995): *Introducción a la Termodinámica*. Addison Wesley Iberoamericana. pp. 148
- Zemansky, M.W.; Dittman, R.H. (1981): *Calor y Termodinámica*. Mc. Graw Hill. 6º ed. pp 170-173 y pp. 192.