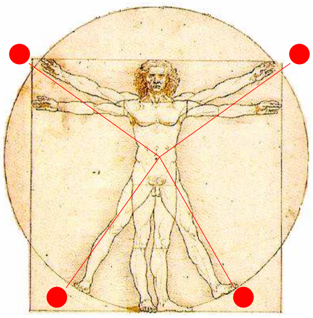
TECNOLOGÍ@ y *DESARROLLO*

Revista de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente

VOLUMEN VII. AÑO 2010

SEPARATA



DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE MODELIZACIÓN DE SISTEMAS MEDIOAMBIENTALES Y SU APLICACIÓN A LOS MODELOS ESPACIALES DE SOSTENIBILIDAD DE NÚCLEOS URBANOS. (II)

El modelo propuesto y su similitud con la mecánica Lagrangiana.

Mª Jesús Retana Maqueda, Laura Abad Toribio,
Tomás García Martín, Rafael Magro Andrade

UNIVERSIDAD ALFONSO X EL SABIO
Escuela Politécnica Superior
Villanueva de la Cañada (Madrid)

Junio, 2010.
http://www.uax.es/publicaciones/archivos/TECMAD10_004.pdf

Escuela Politécnica Superior.
Universidad Alfonso X el Sabio.
28691, Villanueva de la Cañada (Madrid).
ISSN: 1696-8085

DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE MODELIZACIÓN DE SISTEMAS MEDIOAMBIENTALES Y SU APLICACIÓN A LOS MODELOS ESPACIALES DE SOSTENIBILIDAD DE NÚCLEOS URBANOS. (II)

El modelo propuesto y su similitud con la mecánica Lagrangiana.

Maria Jesús Retana Maqueda (a), Laura Abad Toribio (b), Tomás García Martín (c), Rafael Magro Andrade (d)

(a) Ingeniera Industrial. Adjunta a la Jefatura de Estudios de Ingeniería Industrial
Universidad Alfonso X el Sabio. Tf: 918109763, email: mretamaq@uax.es
Universidad Alfonso X el Sabio. Avda de la Universidad nº 1, Villanueva de la Cañada, 28691
(b) Dra en Ciencias Físicas. Área de Matemáticas y Física Aplicadas.
Universidad Alfonso X el Sabio. Tf: 918105207, email: labad@uax.es
(c) Dr. Ingeniero Químico, Subdirector de la Escuela Politécnica Superior,
Universidad Alfonso X el Sabio. Tf: 918109145, email: tgarcmar@uax.es
(d) Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos. Director de la Escuela Politécnica Superior
Universidad Alfonso X el Sabio. Tf: 918105087, email: rmagrand@uax.es

RESUMEN:

Este trabajo pretende plantear la relación metodológica existente entre el modelo propuesto con anterioridad (Retana, M. J. et al, 2010) y el planteamiento analítico de la mecánica de Lagrange.

La metodología de Lagrange es una metodología genérica, que desarrolla al margen de los conceptos básicos de la mecánica clásica, excepto del concepto de energía. Pese a las limitaciones teóricas que son discutibles, presenta una serie de ventajas que le confieren una versatilidad que no tienen los métodos clásicos. Complica de forma clara los problemas sencillos pero simplifica notablemente los problemas complejos. Esta es la gran ventaja en su aplicación a los modelos medioambientales que raramente son sencillos de plantear y aplicar.

PALABRAS CLAVE: Sostenibilidad, modelos, variables ambientales, modelización, metodología de modelización ambiental, mecánica analítica, Lagrange.

ABSTRACT:

This paper tries to raise the methodological existing relation between the model proposed previously (Retana, M. J. et al, 2010) *and the analytical exposition of Lagrange's mechanics.*

Lagrange's methodology is a generic methodology, which it develops to the margin of the basic concepts of the classic mechanics, except of the concept of energy. In spite of the theoretical limitations that are debatable, he presents a series of advantages that award a versatility that the classic methods do not have. It complicates of clear form the simple problems but it simplifies notably the complex problems. This one is the great advantage in his application to the environmental models who strange are simple to consider and apply.

http://www.uax.es/publicaciones/archivos/TECMAD10_004.pdf

KEY-WORDS: Sustainability, models, environmental variables, modeling, environmental modeling methodology, analític mechánic , Lagrange.

SUMARIO: 1. Introducción, 2. Breve introducción a la Mecánica de Lagrange, 3. Paralelismo, 4. Conclusiones, 5. Agradecimientos, 6. Referencias.

SUMMARY: 1. Introduction, 2. Brief introduction to Lagrange's Mechanics, 3. Parallelism, 4. Conclusions, 5. Acknowledgements, 6. References.

1.-Introducción.

La sostenibilidad y en especial el desarrollo sostenible es quizás uno de los conceptos más ambiguos y controvertidos, que cada día cobran más importancia. La búsqueda de la sostenibilidad y el desarrollo sostenible exige integrar una serie de conceptos muy diversos y factores muy dispares, económicos, sociales, culturales, políticos, ecológicos (Gallopín G. et al, 2001; Kates et al, 2001). El desarrollo es un término relacionado con crecimiento, estabilidad y modernización, pero no sólo tiene un significado económico o de crecimiento material, sino que también persigue la realización plena del ser humano. Una antigua definición de desarrollo sostenible lo vincula a la satisfacción de las necesidades del presente, sin comprometer la habilidad de las futuras generaciones para alcanzar sus propios requisitos. ¿Pero, qué tipos de desarrollo son sostenibles?

Cuando se quiere hacer cualquier tipo de estudio sobre la sostenibilidad se debe partir siempre de una serie de variables ambientales, que se suelen agruparse en las áreas temáticas hidrología, calidad del agua, suelos, biota y aspectos socioeconómicos. El propósito de la evaluación ambiental es determinar los efectos de las actividades propuestas sobre dichas variables y cómo dichos efectos pueden transmitirse a otras variables a través de las interacciones existentes entre ellas.

Así, cuando se quiere calcular la evolución de un cierto factor *A*, que es función de muchos otros parámetros o subfactores, se plantea una problemática básica que es la operatividad del sistema.

El campo tan general que hemos abierto al querer diseñar el factor *A* (Retana, M. J. et al, 2010), hace aparecer en el horizonte un problema antiguo que en Mecánica Racional está resuelto desde hace más de dos siglos y es lo que se denomina la Mecánica Analítica.

La Mecánica Analítica fue diseñada por Joseph Louis Lagrange en un texto que escribió en el año 1810. Ese texto, o más bien esta teoría matemática, aunque de aplicación directa a todos los problemas de Mecánica, nos permite trabajar de una forma absolutamente diferente a lo que podríamos llamar método convencional o MECÁNICA CLÁSICA. (Goldstein, H. 1994), (Magro, R., 2001).

Nos podríamos preguntar qué relación tiene la Mecánica Analítica, que se suele relacionar siempre con el ámbito de la física y la ingeniería, que aborda tantos conceptos dispares, sin embargo, tiene un paralelismo importante. Su importancia se describe en los siguientes párrafos.

2.- Breve introducción a la Mecánica de Lagrange.

La Mecánica Clásica es una mecánica que se basa en una serie de condicionantes muy simples. Existen unos elementos que se llaman *entes*, que son los puntos y los sólidos rígidos. Sobre esos entes actúan una serie de elementos que se denominan *fuerzas*.

La interacción de esas *fuerzas* sobre cada uno de los *entes* (puntos o cuerpos) está definida mediante una serie de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones diferenciales son capaces a su vez de predecir el movimiento de un punto o el movimiento de un cuerpo. O sea predicen:

"Cómo va a evolucionar la posición de un punto o de un cuerpo en función del tiempo".

Los parámetros que intervienen en la formulación de las ecuaciones de Lagrange son, resumiendo, los siguientes (Prieto, M., 1994):

- T → Energía cinética total del sistema: suma de las energías cinéticas de las partículas.
- V → Energía potencial total del sistema: suma de las energías potenciales de las partículas.
- q_j → Coordenada generalizada: cada grado de libertad del sistema se expresa mediante una coordenada generalizada.
- $\dot{q}_j$ → Velocidad generalizada: derivada temporal de las coordenadas generalizadas.
- Q_j → Fuerzas generalizadas: si se considera únicamente el caso conservativo que simplifica las ecuaciones, no hace falta definir las fuerzas generalizadas.

La forma más general de estas ecuaciones, ecuaciones de Euler-Lagrange, para un sistema discreto de partículas es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \tag{1}$$

El subíndice *j* va desde 1 hasta *n*, por lo que realmente tenemos *n* ecuaciones (siendo *n* el número de grados de libertad del sistema), la resolución de estas *n* ecuaciones nos dará el estado del sistema en todo instante.

Las ecuaciones de la Mecánica Clásica funcionan muy bien en el entorno de la ingeniería y empiezan a funcionar mal cuando los elementos son macroscópicos o microscópicos. Sin embargo, es preciso puntualizar que las coordenadas generalizadas del sistema no tienen por qué ser distancias, pueden ser ángulos, etc.

Si en las Ecuaciones de Lagrange se aplican a un sistema en el que todas las fuerzas son conservativas podemos reescribir la ecuación (1) ya que:

$$Q_j=\frac{-\partial V(q_1,q_2,...,q_n)}{\partial q_j}\equiv\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial q_j}=0 \tag{3}$$

El potencial, *V*, depende exclusivamente de las coordenadas generalizadas, y no de las velocidades generalizadas, de modo que: $\frac{-\partial V(q_1,q_2,...,q_n)}{\partial \dot{q}_j}=0$, por tanto se define la función Lagrangiana (conocida simplemente como la Lagrangiana) como:

$$L=T-V \tag{4}$$

La Lagrangiana tiene una serie de propiedades que se resumen en los siguientes puntos:

- Hay infinitos modos diferentes de escoger las coordenadas generalizadas (aunque cada sistema tiene un número fijo de grados de libertad).
- En estas ecuaciones desaparece el carácter vectorial. La Lagrangiana, (L=T-V), es un escalar, y por tanto, es invariante bajo cambios de coordenadas.

- La función Lagrangiana depende de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y el tiempo, por tanto las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas se tratan de modo independiente, por ejemplo, una derivada respecto a q_j no afectaría a dq_j/dt.

3.- Paralelismo.

Los multiplicadores de Lagrange, son un método para trabajar con funciones de varias variables que nos interesa maximizar o minimizar, y está sujeta a ciertas restricciones. Este método introduce una nueva variable escalar desconocida, el multiplicador de Lagrange, para cada restricción y forma una combinación lineal involucrando los multiplicadores como coeficientes. Se utilizan en estudios de análisis económico, por ejemplo en la gestión de la economía de recursos naturales.

Lagrange, que era matemático no lo olvidemos, lo que quiso y "logró" fue diseñar un método genérico, en el que podríamos decir que no hacía falta entender la Mecánica Racional, sino poder "operar" con ella.

Es decir, diseñó un método que proporciona una metodología que siempre es la misma, sean cual sean las condiciones de trabajo, a diferencia de lo que ocurre, por ejemplo, en la Mecánica Clásica, en que no se puede trabajar igual con un sistema inercial que con un sistema no inercial.

Sin embargo, Lagrange obvia todo esto. Diseñó un método que permite saber cómo evoluciona un sistema en función de una serie de variables. Variables que son creadas por la misma persona que diseña la evolución de ese sistema, y variables que no tienen porqué ser las mismas en diferentes tipos de estudio. De hecho, la metodología de Lagrange permite elegir otras variables y, si están bien elegidas, se puede predecir de forma correcta la evolución de un sistema con dos sistemas diferentes de variables, sea cual sea ese sistema. Ahí está el claro *paralelismo* que existe entre la Mecánica Analítica y la investigación que se quiere plantear.

Por ello, podríamos decir que la Mecánica Analítica es una formulación abstracta y general de la Mecánica que permite el uso en igualdad de condiciones de sistemas inerciales y no inerciales, sin que las ecuaciones del movimiento cambien. O sea, las condiciones que hacen prever la evolución de un sistema.

Es muy importante la palabra abstracta, ya que proporciona la idea de aleatoriedad y generalidad del método propuesto.

La característica principal de la formulación de la Mecánica Analítica, es que se basa en unos pocos principios generales, (Magro, R., 2001), y a partir de ellos se es capaz de generar una serie de planteamientos que permiten obtener la evolución de ese sistema.

La Mecánica Analítica tiene, en general, dos formulaciones básicas. Una es la formulación Lagrangiana (de Lagrange) y otra es la formulación Hamiltoniana (de Hamilton). Las dos describen el mismo fenómeno, independientemente de aspectos formales y metodológicos, y llegan a las mismas conclusiones. Sin embargo, la formulación Lagrangiana está mucho más orientada a la parte práctica, por eso vamos a utilizarla en el desarrollo de este trabajo.

La Mecánica Lagrangiana tiene la ventaja de ser suficientemente general como para que las ecuaciones del movimiento sean invariantes respecto a cualquier cambio de coordenadas. Esto es, permite trabajar con cualquier tipo de variables, sean cuales sean éstas, siempre que las variables sean capaces de definir aspectos del sistema del que se quiere prever su evolución.

Así, para un sistema con n grados de libertad, es decir, que dependa de n variables, la Mecánica Lagrangiana proporciona un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden, denominadas ecuaciones del movimiento, que permiten conocer cómo evolucionará el sistema.

Aunque, en general, la integración de este sistema no es sencilla, resulta de gran ayuda reducir el número de coordenadas del problema buscando magnitudes o variables más sencillas que otras. Así, por ejemplo, una variable distancia algunas veces suele ser más sencilla que una variable de ángulo; o, por ejemplo, una variable medible como puede ser la concentración de CO, a veces es mucho más sencilla de valorar que una variable como aspectos sociológicos o aspectos personales o apreciaciones sobre algún aspecto medioambiental.

Sin embargo, el planteamiento Lagrangiano tiene una complicación, en problemas sencillos se resuelve de forma muy fácil, pero en problemas complejos no es tan sencilla de resolver.

A priori, se puede definir el número de variables que se quiera siempre que cumplan una condición. Por ejemplo, si tenemos un sistema en tres dimensiones, la posición de un punto obviamente depende de tres dimensiones, aunque podría definirla mediante ocho variables. Es obvio que, de esas ocho variables, sobran cinco porque con tres dimensiones estaría definida la posición de un punto. Luego, tendríamos que buscar unas ecuaciones que relacionaran las cinco variables dependientes, con las variables independientes.

Cuando el sistema es muy sencillo, como decíamos antes, buscar relaciones matemáticas entre ellas es muy fácil y eliminarlas de la función general del sistema es también muy sencillo. Sin embargo, a veces el buscar relaciones entre variables dependientes, que se sabe que son dependientes a priori por una metodología bastante experimental, es muy complicado y, sobre todo, no sólo encontrar relaciones, sino plasmar esas relaciones mediante ecuaciones matemáticas.

Sin embargo, la teoría de Lagrange presenta un *paralelismo* innegable con el problema medioambiental que acabamos de plantear.

Se quiere ver cómo evoluciona un sistema. En la teoría de Lagrange, puede ser un punto, un cuerpo o un sistema mucho más complejo.

En Medio Ambiente queremos plantear cómo varía un sistema que llamaremos *A*, que a su vez depende de un número desconocido de variables y que no sabemos cómo se interrelacionan entre sí, pero que sabemos que en general tiene relación.

En Mecánica ese sistema depende de muchas variables, que no sabemos a priori cuántas son ni cuáles son. Y, cuando las elegimos, no sabemos si hemos elegido de más o de menos.

En los análisis medioambientales nos pasa algo similar. Como hemos dicho al principio, el gran problema que tenemos, es que hay una serie de variables que son obvias a la hora de ser elegidas, pero hay otra serie de variables que no está tan claro que hagan variar al sistema *A*, o que la dependencia del sistema *A* de ellas sea suficientemente importante como para tenerlas en cuenta. Pero también puede ocurrir que haya variables que no sabemos si influyen sobre *A* y que sí influyen.

Este es el *segundo paralelismo*.

El *tercer paralelismo* se centra en las propias variables de las que depende el sistema *A*.

Acabamos de decir que Lagrange permite elegir cualquier tipo de variable y que incluso seamos capaces de predecir cómo se mueve *A*, o sea, cómo evoluciona un sistema mecánico eligiendo diferentes grupos de variables.

Exactamente igual puede pasar en Medio Ambiente. El sistema *A* dependerá de un número finito de variables, pero su evolución puede ser predicha o diseñada de forma que puede funcionar muy bien y se puede prever muy bien su evolución con dos, tres o cuatro variables de un tipo u otras de tipo absolutamente diferente.

Y si lo que estamos buscando es cómo va a variar o evolucionar el sistema *A*, no debe preocuparnos qué tipo de variables vamos a elegir. Lo único que debe preocuparnos es si la evolución es correcta, o sea, si se ajusta a la realidad y si las variables que hemos elegido para predecir esa evolución son medibles.

En este sentido, si elegimos un tipo de variables de las cuales no sabemos cómo va a ser su evolución, difícilmente podremos saber cómo van a hacer variar el sistema A.

Por último, Lagrange es capaz, aplicando las denominadas ecuaciones de Lagrange, de obtener una serie de ecuaciones (denominadas *ecuaciones del movimiento*) que una vez integradas permiten definir la posición del sistema en función del tiempo.

Estas variables que utiliza Lagrange tienen que ser variables independientes, es decir, cuando tengamos un sistema que depende de ocho variables y se sepa que, al final, sólo hay tres independientes, sólo habrá tres ecuaciones del movimiento y no puede haber más; porque si planteamos el método de Lagrange con variables dependientes, estaremos falseando los datos y las integrales no saldrían correctas.

Algo similar ocurre en el ámbito del Medio Ambiente.

En el estudio de la evolución de la sostenibilidad ambiental, tenemos una serie de variables que dependen entre sí. Por ejemplo, imaginemos que el sistema *A* que queremos estudiar es el nivel acústico en una vía. Éste depende de variables como pueden ser el número de vehículos, la velocidad del viento, la temperatura o las características geométricas de la vía. Entonces, de las cuatro variables anteriores, sin hacer un estudio muy profundo, parece que las características geométricas de la vía no tienen nada que ver con la temperatura ni con la velocidad del viento. Podrían tener algo que ver quizá con el número de vehículos en la vía.

Lo que parece obvio, es que el número de vehículos en la vía no tiene nada que ver ni con la velocidad del viento ni con la temperatura. Pero también parece obvio que sí existe alguna relación, aunque es complicada y no la sabemos, entre la velocidad del viento y la temperatura.

Tendríamos un caso en el cual hay cuatro variables, de las cuales dos de ellas parecen claramente dependientes (velocidad del viento y temperatura) y las otras dos (intensidad del tráfico y geometría de la vía) son independientes entre sí. Por tanto, nuestro sistema dependería de tres variables que podríamos llamar independientes.

Entonces, lo que tendríamos que hacer es intentar buscar una relación entre la temperatura y la velocidad del viento que nos permitiera eliminar una de ellas de nuestro estudio.

¿Qué es más fácil de medir? En este caso, el ejemplo es con dos variables muy sencillas y que son fáciles de medir. Pero siempre en todos los perfiles de Medio Ambiente hay unas variables más complicadas de medir que otras.

Para la relación entre ellas, podríamos recurrir a estudios históricos o a relaciones que hayamos medido nosotros, teniendo en cuenta que cuando hacemos estudios medioambientales el primer y segundo decimal son despreciables. Esto es, cuando por ejemplo hablamos de niveles acústicos, variaciones de 1 dB ó 2 (aunque la ley es estricta) no tienen sentido.

Cuando se habla de concentraciones de CO o de N_2, no se puede hablar de límites concretos, sino que hay que hablar siempre de intervalos. Por tanto, las ecuaciones matemáticas son mucho más laxas y no hace falta tener datos tan exactos como podríamos necesitar en un problema de Mecánica.

De esta forma, realizando un estudio propio, podríamos predecir una ley matemática que relacionara la velocidad del viento con la temperatura. Entonces, en la formulación final del modelo tendría únicamente tres variables independientes, que serían el tráfico, la geometría de la vía y, por ejemplo, la temperatura.

4.- Conclusiones.

En este artículo hemos querido poner de manifiesto que una metodología que se podría tachar de extremadamente teórica y que en principio solo parecía aplicable al desarrollo de la mecánica teórica puede aplicarse con pequeñas variaciones al estudio de modelos de carácter medioambiental. Es importante destacar que esta aplicación tiene su mayor utilidad cuando se le da al modelo un carácter dinámico permitiendo que las variables medioambientales que en un principio pueden suponerse estáticas, se conviertan en dinámicas lo que nos va a permitir mediante unas ecuaciones similares a las de Lagrange, ver la variación en el tiempo de conceptos tan complejos como la sostenibilidad y, sobre todo, puede ser una herramienta muy útil en la toma de decisiones en diferentes tipos de actuaciones.

5. Agradecimientos.

Agradecemos a la Fundación Universidad Alfonso X el Sabio y al Banco de Santander el habernos concedido el proyecto de investigación dentro del cual se han desarrollado los trabajos que han conducido con la redacción de este artículo.

6.- Referencias.

1. GALLOPIN, G. C. et al, (2001). *Science and technology, sustainability and sustainable development*, Economic Commission for Latin America ant the Caribbean (ECLAC).
2. GOLDSTEIN, H. (1994). *Mecánica Clásica*.
3. KATES et al, (2001). *Sustainability science*, Science 292, Pag. 641-642.
4. MAGRO, R. (2001). *Cuadernos de Mecánica Racional*.
5. MAGRO, R. y MORALES, J. (2001). *Evaluación impacto ambiental: medidas correctoras: introducción al análisis medioambiental*. Madrid.
6. PRIETO, M. (1994) *Curso de Mecánica Racional*. Universidad Politécnica de Madrid.
7. RETANA, M. J., el al. (2010). *Diseño de una propuesta de modelización de sistemas medioambientales y su aplicación a los modelos espaciales de sostenibilidad de núcleos urbanos*. Universidad Alfonso X el Sabio.